Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 13

Aufgabe 50) Lösungsskizze: (a) Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Ihr Träger ist die Menge $\{k \in \mathbb{Z} | f(k) \neq 0\}$. Der Träger ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist.
Ist $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Funktion, so können wir deshalb $f_n \in C_c(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ definieren durch

$$f_n(k) \quad = \quad \begin{cases} f(k) & \text{falls } |k| \leq n \\ 0 & \text{falls } |k| > n. \end{cases}$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge f_n punktweise gegen f. D.h. die Menge der Punkte, wo diese Konvergenz nicht vorliegt, ist die leere Menge. Diese hat aber bezüglich eines jeden Daniell-Integrals das Maß Null. □

(b) Setze für $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls} \quad |x| \leq n \\ (n+1-|x|) \cdot n^2 & \text{falls} \quad n < |x| < n+1 \\ 0 & \text{falls} \quad |x| \geq n+1. \end{cases}$$

Der Träger von f_n ist offenbar das Intervall $[-n-1, n+1]$, also kompakt. Weiterhin ist f_n stetig, da es auf jedem Definitionsintervall als Polynomfunktion stetig ist und die Definitionen an den Intervallgrenzen übereinstimmen. Also ist $f_n \in C_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Weiterhin gilt offensichtlich $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Bezüglich des Riemann-Integrals ist jeder einzelne Punkt eine Nullmenge. Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, ist auch $\mathbb{Q}$ als abzählbare Menge eine Nullmenge. Also gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ außerhalb einer Nullmenge. Deshalb ist f messbar. □

Aufgabe 51) Lösungsskizze: Die Abbildung $p : H \to B$ hat nach Konstruktion die Eigenschaft $q = v - p(v) \in Q = B^{\perp}$. Sie ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt: Gilt auch $q' = v - p' \in Q$ mit $p' \in B$, so folgt $q - q' = (v - p(v)) - (v - p') = p' - p(v) \in B$. Wegen $q - q' \in B^\perp$ gilt dann aber $\|q - q'\|^2 = \langle q - q', q - q' \rangle = 0$ und damit $q - q' = 0$, also $q = q'$. Dann ist aber $p' = p(v)$, was die Eindeutigkeit beweist.

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt $\alpha \cdot v - \alpha \cdot p(v) = \alpha \cdot (v - p(v)) \in Q$, da Q wie auch B jeweils Untervektorräume von H sind. Das heißt aber $\alpha \cdot p(v) \in B$ erfüllt ebenfalls die für $p(\alpha \cdot v)$ geltende Bedingung $\alpha \cdot v - p(\alpha \cdot v) \in Q$, woraus wegen der Eindeutigkeit $p(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot p(v)$ folgt.
Sind $v_1, v_2 \in H$ gegeben, so folgt entsprechend aus $(v_1+v_2)-(p(v_1) + p(v_2)) = (v_1 - p(v_1)) + (v_2 - p(v_2)) \in Q$, dass $p(v_1 + v_2) = p(v_1) + p(v_2)$ ist. Damit ist die Linearität bewiesen.

Weiterhin gilt für $v, w \in H$ wegen der Bilinearität des Skalarprodukts:

$$\begin{aligned} \langle p(v), w \rangle &= \langle p(v), (w - p(w)) + p(w) \rangle \\ &= \langle p(v), w - p(w) \rangle + \langle p(v), p(w) \rangle \;=\; \langle p(v), p(w) \rangle, \end{aligned}$$

denn wegen $p(v) \in B$ und $w - p(w) \in Q = B^\perp$ ist $\langle p(v), w - p(w) \rangle = 0$. Durch eine symmetrische Überlegung folgt

$$\langle v, p(w) \rangle = \langle p(v), p(w) \rangle + \langle v - p(v), p(w) \rangle = \langle p(v), p(w) \rangle.$$

Jetzt folgt sofort $\langle p(v), w \rangle = \langle v, p(w) \rangle$. $\square$

Aufgabe 52) Lösungsskizze: Für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ ist $*f$ eine 2-Form und deshalb $d{*}f = 0$, woraus $\delta(f) = 0$ folgt. Deshalb gilt $\Delta(f) = \delta(df) = *d{*}df$, denn für das Vorzeichen aus Aufgabe 46) gilt $(-1)^{1\cdot(2-1+1)} = 1$. Das bedeutet:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Für den $*$ Operator zur Metrik g gilt:

$$*_g(dx_I) = \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{\Pi_{i \in I} g_i} \cdot *_{Eukl}(dx_I),$$

denn mit den Bezeichnungen aus dem Skript ist $\lambda_i = g_i^{-1}$: die λ_i geben das Skalarprodukt eines dx_i mit sich an, wenn die dx_i eine Orthogonalbasis bilden. Daraus ergibt sich:

$$*df = \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{g_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\sqrt{g_1 g_2}}{g_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} dx.$$

$$
\begin{aligned}
d*df &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{g_1g_2}}{g_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot dx\wedge dy - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{g_1g_2}}{g_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy\wedge dx.\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{g_1g_2}}{g_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{g_1g_2}}{g_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) dx\wedge dy\\
\Delta(f) = *d*df &= \frac{1}{\sqrt{g_1g_2}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{g_1g_2}}{g_1}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{g_1g_2}}{g_2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Im Fall $g = k^*(g_E)$ der Aufgabe 49) ist $g_1(\phi,\psi) = 1$ und $g_2(\phi,\psi) = \cos^2(\phi)$. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\Delta(f) &= \frac{1}{\cos(\phi)}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\cdot\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\cdot\frac{\partial f}{\partial\psi}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\cos(\phi)}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\cos\phi\cdot\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\right)+\frac{1}{\cos^2\phi}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial\psi^2}.
\end{aligned}
$$

Im Spezialfall der Poincaré-Metrik aus Aufgabe 48) ist $g_1(x,y) = g_2(x,y) = \frac{1}{y^2}$ und deshalb $\frac{\sqrt{g_1g_2}}{g_1} = \frac{\sqrt{g_1g_2}}{g_2} = 1$, woraus dann folgt:

$$
\Delta(f) = y^2\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right). \quad \square
$$

Aufgabe 53) Lösungsskizze: (a) Nach der Bedingung 2. in 17.0.3 gilt für alle $m,n\geq 1$: $B_m(x) = \frac{B'_{m+1}(x)}{m+1}$ sowie $B'_n(x) = n\cdot B_{n-1}(x)$. Partielle Integration liefert deshalb:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 B_n(x)\cdot B_m(x)\,dx &= B_n(x)\cdot\frac{B_{m+1}(x)}{m+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 n\cdot B_{n-1}(x)\cdot\frac{B_{m+1}(x)}{m+1}\,dx\\
&= (B_n(1)-B_n(0))\cdot\frac{B_{m+1}}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int_0^1 B_{n-1}(x)B_{m+1}(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

denn es gilt nach 17.0.4 $B_{m+1}(1) = B_{m+1}(0) = B_{m+1}$.

Wir zeigen jetzt die Formel durch vollständige Induktion nach der Variablen n:

Sei zunächst $n = 1$ und $m \geq 1$ beliebig. Dann gilt $B_1(1) = \frac{1}{2}$, $B_1(0) = -\frac{1}{2}$, sowie $B_0(x) = 1$ und $\int_0^1 B_{m+1}(x)\,dx = 0$ nach 17.0.3. Deshalb folgt:

$$
\int_0^1 B_1(x)\cdot B_m(x)\,dx = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{B_{m+1}}{m+1} - 0 = (-1)^{1-1}\cdot B_{m+1}\cdot\frac{1!\cdot m!}{(m+1)!}.
$$

Damit ist der Induktionsanfang erledigt.

Im Induktionsschluss setzen wir jetzt für $n \geq 2$, $m \geq 1$ voraus, dass die Formel für $n-1$ und alle $m \geq 1$ gültig ist. Nach 17.0.4 gilt dann $B_n(1) = B_n(0)$, so dass in der Rekursionsformel der erste Summand gleich 0 ist. Wir erhalten deshalb, wenn wir die Induktionsvoraussetzung einsetzen:

$$\int_0^1 B_n(x) \cdot B_m(x)\, dx \;=\; -\frac{n}{m+1} \int_0^1 B_{n-1}(x) B_{m+1}(x)\, dx$$

$$= -\frac{n}{m+1} \cdot (-1)^{(n-1)-1} \cdot B_{(n-1)+(m+1)} \cdot \frac{(n-1)! \cdot (m+1)!}{((n-1)+(m+1))!}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot B_{n+m} \cdot \frac{n! \cdot m!}{(n+m)!}. \quad \square$$

(b) Die Bedingung $a_{n,0} = 0$ folgt sofort aus der Bedingung 3. aus 17.0.3. und der Definition. Für $k \neq 0$ ist $\frac{1}{2\pi i k} \cdot e^{2\pi i k x}$ eine Stammfunktion von $e^{2\pi i k x}$, so dass wir mittels partieller Integration die folgende Formel erhalten:

$$a_{n,k} = B_n(x) \cdot \frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k}\Big|_0^1 - \frac{1}{2\pi i k} \cdot \int_0^1 B_n'(x) \cdot e^{2\pi i k x}\, dx.$$

Wir zeigen die Behauptung jetzt wieder durch Induktion nach n: Wir beachten dabei immer $e^{2\pi i k \cdot 1} = e^{2\pi i k \cdot 0} = 1$.

Für $n = 1$ erhalten wir:

$$a_{1,k} = \left(\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})\right) \cdot \frac{1}{2\pi i k} - \frac{1}{2\pi i k} \cdot \int_0^1 1 \cdot e^{2\pi i k x}\, dx = \frac{1}{2\pi i k} = \frac{(-1)^{1-1} \cdot 1!}{2\pi i k}.$$

Für den Induktionsschluss nehmen wir an, dass $n \geq 2$ ist und dass die Formel für $n-1$ richtig ist. Wegen $n \geq 2$ gilt $B_n(1) = B_n(0)$, so dass in obiger Formel der erste Summand verschwindet. Wegen $B_n'(x) = n \cdot B_{n-1}(x)$ gilt deshalb $a_{n,k} = -\frac{1}{2\pi i k} \cdot n \cdot a_{(n-1),k}$. Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung erhält man dann:

$$a_{n,k} = -\frac{1}{2\pi i k} \cdot n \cdot \frac{(-1)^{(n-1)-1} \cdot (n-1)!}{(2\pi i k)^{(n-1)}} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n!}{(2\pi i k)^n}. \quad \square$$

(c) Nach den Sätzen in 28.8.und 28.6 bilden die Funktionen $e^{2\pi i k x}$ eine Hilbertraumbasis von $L^2([0,1])$, und der Übergang zu den Fourierkoeffizienten liefert eine Isometrie $L^2([0,1]) \tilde{\to} l^2(\mathbb{Z})$.

Wendet man das auf die Bernoullipolynome an, so ergibt sich für alle $m, n \geq 1$ wegen

$$B_m(x) = \overline{B_m(x)} \qquad \text{die Beziehung:}$$

$$\int_0^1 B_n(x) \cdot B_m(x)\, dx \;=\; \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n,k} \cdot \overline{a_{m,k}}.$$

Es gilt nach (b):

$$a_{n,k} \cdot \overline{a_{m,k}} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n!}{(2\pi i k)^n} \cdot \frac{(-1)^{m-1} \cdot m!}{(-2\pi i k)^m}$$

$$= \frac{(-1)^{n+m} \cdot n! \cdot m!}{(2\pi)^{n+m} \cdot i^{n+m} \cdot (-1)^m} \cdot \frac{1}{k^{n+m}}.$$

Mit Hilfe von (a) können wir die Gleichung jetzt umschreiben:

$$(-1)^{n-1} \cdot B_{n+m} \cdot \frac{n! \cdot m!}{(n+m)!} = \frac{(-1)^{n+m} \cdot n! \cdot m!}{(2\pi)^{n+m} \cdot i^{n+m} \cdot (-1)^m} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \frac{1}{k^{n+m}}.$$

Für $m, n \geq 1$ ist dabei die Summe auf der rechten Seite absolut konvergent. Wenn wir $m = n$ einsetzen, gilt wegen $\frac{1}{k^{2n}} = \frac{1}{(-k)^{2n}}$:

$$(-1)^{n-1} \cdot B_{2n} \cdot \frac{n! \cdot n!}{(2n)!} = \frac{(-1)^{2n} \cdot n! \cdot n!}{(2\pi)^{2n} \cdot (-1)^n \cdot (-1)^n} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^{2n}}.$$

Bringt man die Faktoren auf die andere Seite, so erhält man:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \quad = \quad \frac{(-1)^{n-1} \cdot B_{2n} \cdot \pi^{2n} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Bemerkung: Für $m \neq n$ erhält man übrigens keine neuen Informationen: Im Fall, dass $m + n$ ungerade ist, gilt $B_{m+n} = 0$ und in der Summe heben sich die Summanden $\frac{1}{k^{n+m}}$ und $\frac{1}{(-k)^{n+m}}$ gegenseitig auf, so dass die Formel dann $0 = 0$ lautet. Im Fall $m + n = 2n'$ gerade hängt die Formel nach Kürzen des Faktors $(-1)^n \cdot n! \cdot m!$ auf beiden Seiten nur noch von $2n'$ ab und stimmt mit der Formel für den schon behandelten Fall (n', n') überein.
Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ erhält man folgende Formeln, wobei man die ersten fünf Werte für B_{2n} dem Anhang A des Skripts entnehmen kann:

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{6} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6} \\
B_4 &= -\frac{1}{30} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} &= \frac{\pi^4}{90} \\
B_6 &= \frac{1}{42} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} &= \frac{\pi^6}{945} \\
B_8 &= -\frac{1}{30} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} &= \frac{\pi^8}{9450} \\
B_{10} &= \frac{5}{66} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{10}} &= \frac{\pi^{10}}{93555} \\
B_{12} &= -\frac{691}{2730} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{12}} &= \frac{691 \cdot \pi^{12}}{3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} \\
B_{14} &= \frac{7}{6} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{14}} &= \frac{2 \cdot \pi^{14}}{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}. \quad \square
\end{aligned}
$$