Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 12

Aufgabe 45) Lösungsskizze: (a) Zunächst muss man sich überlegen, dass die Abbildung π nach M geht: Dass $\pi(b)$ eine symmetrische Matrix vom Rang 1 ist, liest man sofort aus der expliziten Beschreibung ab. Die Spur von $\pi(b)$ ist $\sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$ für $b \in S^{n-1}$.

Dass π differenzierbar ist, prüft man in lokalen Karten nach: Dazu kann man z.B. die inversen Kartenabbildungen ϕ_ν ($\nu = 1, 2$) aus Aufgabe 17) und die Kartenabbildungen $\psi_\mu : M_\mu \to \mathbb{R}^{n-1}$ aus Aufgabe 39) benutzen: man muss zeigen, dass $\psi_\mu \circ \pi \circ \phi_\nu$ jeweils im Defitionsbereich beliebig oft differenzierbar ist. Das folgt aber sofort aus den Permanenzsätzen. □

(b) Nach der Lösung der Aufgabe 39) ist ein beliebiges Element $A = (a_{\mu\nu}) \in M$ von der Form

$$a_{\mu\nu} = \frac{b'_\mu \cdot b'_\nu}{\sum_{i=1}^n (b'_i)^2}$$

für geeignete b'_i. Setzt man jetzt $b_i = \frac{b'_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (b'_i)^2}}$, so folgt sofort die Behauptung $a_{\mu\nu} = b_\mu \cdot b_\nu$ und es ist offensichtlich auch $\sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$. D.h. es gilt $A = \pi(b)$ mit $b = (b_1, \ldots, b_n) \in S^{n-1}$.

Gilt $\pi(b) = \pi(c)$, so folgt $b_\mu \cdot b_\nu = c_\mu \cdot c_\nu$ für alle μ, ν. Daraus folgt zunächst, wenn wir $\mu = \nu$ setzen: $c_\mu = \epsilon_\mu \cdot b_\mu$ mit $\epsilon_\mu \in \{-1, 1\}$. Daraus folgt dann: $b_\mu b_\nu \cdot (\epsilon_\mu \epsilon_\nu - 1) = 0$. Im Fall, dass $b_\mu \neq 0 \neq b_\nu$ ist, folgt daraus $\epsilon_\mu = \epsilon_\nu$. Damit stimmen alle ϵ_μ für die μ mit $b_\mu \neq 0$ überein, d.h. sind alle gleich einem $\epsilon \in \{-1, 1\}$.
Dann folgt aber $c = \epsilon \cdot b$, denn im Fall $b_\nu = 0$ gilt auch $c_\nu = 0$ und somit $c_\nu = \epsilon \cdot b_\nu$. Dass $\pi(-b) = \pi(b)$ gilt, ist klar. □

Aufgabe 46) Lösungsskizze: Wir rechnen sukzessive:

$$*(f \cdot dx_I) = f \cdot dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$$d * (f \cdot dx_I) = \sum_{\nu=1}^{i} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \cdot dx_\nu \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

$$* \, d * (f \cdot dx_I) = \sum_{\nu=1}^{i} (-1)^{(i-1)(n-i)+(\nu-1)} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{\nu-1} \wedge dx_{\nu+1} \ldots \wedge dx_i,$$

denn um $(dx_\nu \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n) \wedge (dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{\nu-1} \wedge dx_{\nu+1} \ldots \wedge dx_i)$ in die richtige Reihenfolge zu bringen, müssen zuerst die $i-1$ Faktoren in der zweiten Klammer an den $n-i$ Faktoren mit Index $\geq i+1$ in der ersten Klammer vorbeigezogen werden und anschließend muss noch dx_ν an den ersten $\nu - 1$ Faktoren der zweiten Klammer vorbeigezogen werden.

$$d * \; d * (f \cdot dx_I)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{i} (-1)^{(i-1)(n-i)+(\nu-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_\nu} \cdot dx_\nu \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{\nu-1} \wedge dx_{\nu+1} \ldots \wedge dx_i$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{i} \sum_{\mu=i+1}^{n} (-1)^{(i-1)(n-i)+(\nu-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \cdot dx_\mu \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{\nu-1} \wedge dx_{\nu+1} \ldots \wedge dx_i$$

$$= \sum_{\nu=1}^{i} (-1)^{(i-1)(n-i)} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_\nu} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_i$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{i} \sum_{\mu=i+1}^{n} (-1)^{(i-1)(n-i+1)+(\nu-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{\nu-1} \wedge dx_{\nu+1} \ldots \wedge dx_i \wedge dx_\mu$$

Damit können wir jetzt eine Hälfte des Laplace-Operators ausrechnen:

$$d\delta(f \cdot dx_I) = (-1)^{i(n-i+1)} \cdot d * \; d * (f \cdot dx_I)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{i} (-1)^n \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_\nu} \cdot \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_i$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{i} \sum_{\mu=i+1}^{n} (-1)^{n-i+\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{\nu-1} \wedge dx_{\nu+1} \ldots \wedge dx_i \wedge dx_\mu$$

Jetzt starten wir die Berechnung der anderen Hälfte:

$$d(f \cdot dx_I) = \sum_{\mu=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \cdot dx_\mu \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_i,$$

$$*d(f\cdot dx_I) = \sum_{\mu=i+1}^{n} (-1)^{\mu-1}\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\cdot dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_{\mu-1}\wedge dx_{\mu+1}\wedge\ldots\wedge dx_n,$$

$$d*d(f\cdot dx_I) = \sum_{\mu=i+1}^{n} (-1)^{\mu-1}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_\mu}\cdot dx_\mu\wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_{\mu-1}\wedge dx_{\mu+1}\wedge\ldots\wedge dx_n$$

$$+\sum_{\mu=i+1}^{n}\sum_{\nu=1}^{i}(-1)^{\mu-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\cdot dx_\nu\wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_{\mu-1}\wedge dx_{\mu+1}\wedge\ldots\wedge dx_n$$

$$= \sum_{\mu=i+1}^{n}(-1)^{i}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_\mu}\cdot dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_n$$

$$+\sum_{\mu=i+1}^{n}\sum_{\nu=1}^{i}(-1)^{\mu-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\cdot dx_\nu\wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_{\mu-1}\wedge dx_{\mu+1}\wedge\ldots\wedge dx_n$$

$$*\,d*d(f\cdot dx_I) = \sum_{\mu=i+1}^{n}(-1)^{i+i(n-i)}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_\mu}\cdot dx_1\wedge\ldots\wedge dx_i$$

$$+\sum_{\mu=i+1}^{n}\sum_{\nu=1}^{i}(-1)^{(\mu-1)+(i-1)(n-i-1)+(\nu-1)+(n-\mu)}\cdot$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\cdot dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{\nu-1}\wedge dx_{\nu+1}\ldots\wedge dx_i\wedge dx_\mu$$

$$= \sum_{\mu=i+1}^{n}(-1)^{i(n-i+1)}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_\mu}\cdot dx_1\wedge\ldots\wedge dx_i$$

$$+\sum_{\mu=i+1}^{n}\sum_{\nu=1}^{i}(-1)^{(n+\nu)+(i-1)(n-i-1)}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu\partial x_\mu}\cdot dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{\nu-1}\wedge dx_{\nu+1}\ldots\wedge dx_i\wedge dx_\mu$$

Bevor wir die Berechnung der zweiten Hälfte abschließen, bemerken wir, dass das δ in $\delta\circ d$ auf den $i+1$-Formen startet und somit ein anderes Vorzeichen bekommt:

$$\delta d(f\cdot dx_I) = (-1)^{(i+1)(n-i)} * \; d*d(f\cdot dx_I)$$

$$= \sum_{\mu=i+1}^{n} (-1)^n \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_\mu} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_i$$

$$+ \sum_{\mu=i+1}^{n} \sum_{\nu=1}^{i} (-1)^{(n+\nu)-(i-1)} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{\nu-1} \wedge dx_{\nu+1} \ldots \wedge dx_i \wedge dx_\mu.$$

Wegen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_\nu \partial x_\mu} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$ heben sich bei der Berechnung des Laplace-Operators die Terme mit den gemischten Ableitungen gegenseitig auf, und es ergibt sich:

$$\Delta(f \cdot dx_I) = d\delta(f \cdot dx_I) + \delta d(f \cdot dx_I) = (-1)^n \cdot \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_\mu} \cdot dx_I. \quad \square$$

Aufgabe 47) Lösungsskizze: Für einen Weg $\phi : [0,1] \to U$ wie in der Aufgabe schreiben wir: $\phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$. Dann gilt:

$$\|\phi'(t)\| = \sqrt{\langle \phi'(t), \phi'(t) \rangle} = \sqrt{\phi_1'(t)^2 \cdot h(\phi_1(t), \phi_2(t)) + \phi_2'(t)^2 \cdot k(\phi_2(t))}$$

$$\geq \sqrt{\phi_2'(t)^2 \cdot k(\phi_2(t))} = |\phi_2'(t)| \cdot \sqrt{k(\phi_2(t))}.$$

Das impliziert nach der Definition der Länge eines Weges:

$$L(\phi) = \int_0^1 \|\phi'(t)\| dt \geq \int_0^1 |\phi_2'(t)| \cdot \sqrt{k(\phi_2(t))} dt$$

$$\geq \int_0^1 \phi_2'(t) \cdot \sqrt{k(\phi_2(t))}\, dt = \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{k(y)} dy.$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitutionsregel, im vorletzten Schritt die Ungleichung $|\phi_2'(t)| \geq \phi_2'(t)$ und die Monotonie des Integrals verwendet haben.

Im Fall, dass $\phi_1'(t) = 0$ und $\phi_2'(t) \geq 0$ für alle t gilt, haben wir an beiden Stellen Gleichheit. Das lässt sich im Fall $y_0 < y_1$ durch einen Weg der Form $\phi(t) = (x_0, y_0 + t(y_1 - y_0))$ auch erreichen. Diese Wege haben also die kürzeste Länge unter allen Wegen, die von $\phi(0)$ nach $\phi(1)$ führen. Im Fall $y_0 > y_1$ kann man unter Benutzung der Abschätzung $|\phi_2'(t)| \geq -\phi_2'(t)$ die Ungleichung

$$L(\phi) \geq - \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{k(y)} dy = \int_{y_1}^{y_0} \sqrt{k(y)} dy$$

erhalten, wobei hier Gleichheit wieder für die linearen Wege gilt. Damit ist

$$\left| \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{k(y)} dy \right|$$

in beiden Fällen die kürzeste Wegelänge zwischen den beiden Punkten.

Aufgabe 48) Lösungsskizze: (a) Sei $\tau_b : (x,y) \mapsto (x+b,y)$. Da $D\tau_b$ die Einheitsmatrix ist und da offensichtlich $g(\tau_b(x,y)) = g(x,y)$ ist, folgt sofort $\tau_b^*(g)(x,y) = {}^t D\tau_b \cdot g(\tau_b(x,y)) \cdot D\tau_b = g(x,y)$.
Weiterhin gilt für die Jacobimatrix von σ:

$$D\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} x^2-y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix},$$

und es ist $g(\sigma(x,y)) = \frac{(x^2+y^2)^2}{y^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sigma^*(g)(x,y) &= {}^t D\sigma(x,y) \cdot g(\sigma(x,y)) \cdot D\sigma(x,y) \\ &= \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4 \cdot y^2} \cdot \begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^2-y^2 & -2xy \\ 2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2)^2 \cdot y^2} \cdot \begin{pmatrix} (x^2+y^2)^2 & 0 \\ 0 & (x^2+y^2)^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g(x,y), \end{aligned}$$

denn es ist $(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2+y^2)^2$. □

(b) Ein Weg mimimaler Länge von $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ nach $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ wird nach Aufgabe 47) durch eine affin lineare Abbildung der Form

$$\phi(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} + t \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

beschrieben. Es gilt

$$L(\phi) = \int_{\frac{\sqrt{3}}{6}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{y} dy = \log(\frac{\sqrt{3}}{2}) - \log(\frac{\sqrt{3}}{6}) = \log(3).$$

Um das Problem für die Punkte $P_0' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und P_1 zu lösen, beweisen wir das Lemma:

Lemma: Lässt der Diffeomorphismus ρ die Riemannsche Metrik g invariant, so gilt $L(\rho \circ \phi) = L(\phi)$ für alle Wege ϕ.
Beweis Lemma: Dass ρ die Riemannsche Metrik invariant lässt, bedeutet:

$$^t(D\rho)(z) \cdot g(\rho(z)) \cdot (D\rho)(z) = g(z)$$

für alle $z \in \mathcal{H}$. Dann gilt aber:

$$\begin{aligned} \|(\rho \circ \phi)'(t)\|^2 &= {}^t(\rho \circ \phi)'(t) \cdot g(\rho(\phi(t))) \cdot (\rho \circ \phi)'(t) \\ &= {}^t\phi'(t) \cdot {}^t(D\rho)(\phi(t)) \cdot g(\rho(\phi(t))) \cdot (D\rho)(\phi(t)) \cdot \phi'(t) \\ &= {}^t\phi'(t) \cdot g(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = \|\phi'(t)\|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$L(\rho \circ \phi) = \int_0^1 \|(\rho \circ \phi)'(t)\| dt = \int_0^1 \|\phi'(t)\| dt = L(\phi).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. Nun ist

$$\sigma(P_0) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \tau_{-1}(P_0').$$

Daraus folgt: $P_0' = \tau_1(\sigma(P_0))$. Weiterhin ist $\tau_1(\sigma(P_1)) = \tau_1(P_0') = P_1$. Da ϕ der kürzeste Weg von P_0 nach P_1 ist, ist nach dem Lemma $\tau_1 \circ \sigma \circ \phi$ der kürzeste Weg von P_0' nach P_1. Er hat wieder die Länge $\log(3)$ und schreibt sich in der Form:

$$\tau_1 \circ \sigma \circ \phi(t) = \left(\frac{2t + 2t^2 - 1}{2(1 + t + t^2)}, \frac{\sqrt{3} \cdot (1 + 2t)}{2(1 + t + t^2)} \right).$$

Der Weg verläuft auf einem Kreis vom Radius 1 um den Punkt 0. Durch eine Umparametrisierung des Weges kann man eine andere Darstellung bekommen, die aber einen Weg derselben Länge liefert. □

Aufgabe 49) Lösungsskizze: Die Jacobimatrix der Abbildung k ist (vgl. die Rechnungen in Aufgabe 4):

$$J = Dk(\phi, \psi) = \begin{pmatrix} -\sin\phi \cdot \cos\psi & -\cos\phi \cdot \sin\psi \\ -\sin\phi \cdot \sin\psi & \cos\phi \cdot \cos\psi \\ \cos\phi & 0 \end{pmatrix}$$

Die Pullback-Metrik $k^*(g_E)$ im Punkt (ϕ, ψ) berechnet sich zu

$$
\begin{aligned}
k^*(g_E) &= {}^tJ \cdot g_E \cdot J = {}^tJ \cdot J \\
&= \begin{pmatrix} (\cos^2\psi + \sin^2\psi)\cdot\sin^2\phi + \cos^2\phi & 0 \\ 0 & (\sin^2\psi + \cos^2\psi)\cdot\cos^2\phi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\phi \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Mit $x = \psi$ und $y = \phi$ sowie $I_1 = (0, 2\pi)$, $I_2 = (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ und $h(\phi,\psi) = \cos^2\phi$ sowie $k = 1$ sind die Voraussetzungen der Aufgabe 47) erfüllt. Daraus folgt, dass der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten mit gleicher ψ-Koordinate durch einen Weg mit konstanter ψ-Koordinate gegeben wird. Auf der Sphäre S^2 liegen diese Wege auf den Großkreisen, die durch den Nord- und den Südpol $(0,0,1)$ und $(0,0,-1)$ gehen. Da die euklidische Metrik von orthogonalen Transformationen invariant gelassen wird und da je zwei Punkte auf der Sphäre durch eine orthogonale Transformation (z.B. Drehung oder Spiegelung) immer in eine Position gebracht werden können, in der sie auf einem solchen Großkreis liegen, gilt für je zwei Punkte auf der Sphäre, dass die kürzeste Verbindung stets auf einem Großkreis verläuft.

Großkreise sind dabei diejenigen Kreislinien, in denen eine durch den Mittelpunkt der Kugel gehende Ebene die Kugeloberfläche schneidet. □