Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 11

Aufgabe 40) Lösungsskizze: Sei $I = \{i_1, i_2\}$ und $J = \{j_1, j_2\}$ mit $i_1 < i_2$ und $j_1 < j_2$. Sei $B = (b_{ij})$ die zu f gehörige Matrix. Dann ist zu zeigen:

$$\Lambda^2(f)_{I,J} = b_{i_1j_1} \cdot b_{i_2j_2} - b_{i_2j_1} \cdot b_{i_1j_2}.$$

Nach Definition gilt:

$$f(e_J) = \sum_{|I'|=2} \Lambda^2(f)_{I',J} \cdot e_{I'}, \qquad \text{aber auch}$$

$$f(e_J) = f(e_{j_1} \wedge e_{j_2}) = f(e_{j_1}) \wedge f(e_{j_2}) = \left(\sum_{\mu=1}^{n} b_{\mu j_1}\, e_\mu\right) \wedge \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu j_2}\, e_\nu\right)$$

Zum Koeffizienten $\Lambda^2(f)_{I,J}$ tragen genau diejenigen Summanden bei, für die μ, ν beide zur Menge I gehören. Also muss man ausrechnen:

$$(b_{i_1j_1}\, e_{i_1} + b_{i_2j_1}\, e_{i_2}) \wedge (b_{i_1j_2}\, e_{i_1} + b_{i_2j_2}\, e_{i_2}) = (b_{i_1j_1} \cdot b_{i_2j_2} - b_{i_2j_1} \cdot b_{i_1j_2})\, e_{i_1} \wedge e_{i_2}.$$

Daraus folgt wegen $e_{i_1} \wedge e_{i_2} = e_I$ die Behauptung. □

Aufgabe 41) Lösungsskizze: Wir betrachten die Abbildung

$$\phi : V \times V \times V \to \Lambda^{N-1}(V) \qquad \text{mit}$$

$$\phi(x, y, z) \;=\; *_b(x \wedge y) \wedge z - (-1)^N \cdot \left(b(y, z) \cdot *_b(x) - b(x, z) \cdot *_b(y)\right).$$

Es muss $\phi = 0$ gezeigt werden. Offensichtlich ist die Abbildung ϕ multilinear. Deshalb reicht es aus, $\phi(x, y, z) = 0$ für x, y, z aus einer fest gewählten Basis zu zeigen. Wir wählen eine Basis $e_1, \ldots, e_N$, bezüglich der die symmetrische Bilinearform b durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird. Es gilt also $b(e_i, e_j) = \lambda_i \cdot \delta_{ij}$.

Weiterhin bemerken wir, dass die Abbildungen $*_b$ von der Wahl eines Erzeugers von $\Lambda^N(V)$ abhängen, dass aber beim Übergang zu einem anderen Erzeuger sich die Abbildung ϕ mit einem Skalar multipliziert. Wir können deshalb annehmen, dass $e_1 \wedge \ldots \wedge e_N$ dieser Erzeuger ist.

Es ist also zu zeigen: $\phi(e_i, e_j, e_k) = 0$ für $1 \leq i, j, k \leq N$.

Im Fall $i = j$ ist $e_i \wedge e_j = 0$ und die beiden Terme in der Klammer sind identisch, so dass die Behauptung sofort folgt.

Im Fall $i \neq k \neq j$ enthält $*_b(e_i \wedge e_j)$ den Basisvektor e_k, so dass dann $*_b(e_i \wedge e_j) \wedge e_k = 0$ folgt. Dann ist aber auch $b(e_j, e_k) = b(e_i, e_k) = 0$, so dass wiederum $\phi(e_i, e_j, e_k) = 0$ unmittelbar folgt.

Es bleiben die Fälle $k = i$ und $k = j$ zu behandeln. Wegen $\phi(y, x, z) = -\phi(x, y, z)$ muss man nur einen dieser Fälle untersuchen.

Zu zeigen ist also $\phi(e_i, e_j, e_i) = 0$ für $i \neq j$. Da die Abbildung ϕ invariant definiert ist, ist die Behauptung invariant gegenüber einer Vertauschung der Basisvektoren. Wir können deshalb o.B.d.A. $i = 1$ und $j = 2$ annehmen.

Dann gilt:

$$*_b(e_1 \wedge e_2) \wedge e_1 = \left(\prod_{l=3}^{N} \lambda_l^{-1}\right) \cdot (e_3 \wedge \ldots \wedge e_N) \wedge e_1$$

$$(-1)^N \cdot b(e_2, e_1) \cdot *_b(e_1) = (-1)^N \cdot 0 \cdot *_b(e_1) = 0 \qquad \text{und}$$

$$-(-1)^N \cdot b(e_1, e_1) \cdot *_b(e_2) = -(-1)^N \cdot \lambda_1 \cdot \left(\prod_{l\neq 2} \lambda_l^{-1}\right) \cdot (-e_1 \wedge e_3 \wedge \ldots \wedge e_N)$$

$$= (-1)^{N-2} \cdot \left(\prod_{l=3}^{N} \lambda_l^{-1}\right) e_1 \wedge e_3 \wedge \ldots \wedge e_N = \left(\prod_{l=3}^{N} \lambda_l^{-1}\right) e_3 \wedge \ldots \wedge e_N \wedge e_1.$$

Daraus folgt sofort $\phi(e_1, e_2, e_1) = 0$. □

Aufgabe 42) Lösungsskizze: (a) Es ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial f(x_0p_0 + x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3)}{\partial x_i}\, dx_i \wedge w \\ &= \sum_{i=0}^{3} f'(x_0p_0 + x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) \cdot p_i \cdot dx_i \wedge w \end{aligned}$$

$$= \quad f'(x_0p_0 + x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) \cdot p \wedge w,$$

wobei wir im letzten Schritt p mit $\sum_{i=0}^{3} p_i \cdot dx_i$ identifiziert haben, nachdem wir die dx_i mit der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ identifiziert haben. Da f nach Voraussetzung nicht konstant ist, gilt $f'(r) \neq 0$ für geeignete r, so dass die Bedingung $d\omega = 0$ zu $p \wedge w = 0$ und damit auch zu $w \wedge p = 0$ äquivalent ist. Weiterhin gilt:

$$*\omega = f(x_0p_0 + x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) \cdot *w.$$

Aus dem bisher bewiesenen folgt dann die Äquivalenz von $d(*\omega) = 0$ und $*w \wedge p = 0$. $\square$

(b) Da nach Voraussetzung $p \neq 0$ und damit linear unabhängig ist, kann man ihn zu einer Basis $e_0 = p, e_1, e_2, e_3$ des $\mathbb{R}^4$ ergänzen. Die Gleichung $w \wedge p = 0$ ist dann äquivalent dazu, dass in der Darstellung von w als Linearkombination von $e_i \wedge e_j$ mit $i < j$ nur Terme mit $i = 0$ einen von 0 verschiedenen Koeffizienten haben: die anderen Basisvektoren überleben, wenn man $w \wedge e_0$ bildet.

Dann ist w also Linearkombination von $e_0 \wedge e_j$, also von der Form $e_0 \wedge \tilde{q}$. Das bedeutet aber $w = -\tilde{q} \wedge e_0 = q \wedge p$ mit $q = -\tilde{q}$.

Gilt umgekehrt $w = q \wedge p$, so ist $w \wedge p = q \wedge p \wedge p = 0$. $\square$

(c) Sei jetzt $w \neq 0$ und $w \wedge p = 0$ und $*w \wedge p = 0$. Nach (b) gibt es q in $\mathbb{R}^4$ mit $w = q \wedge p$. Die Bedingung $*w \wedge p$ lautet dann:

$$*(q \wedge p) \wedge p = 0.$$

Nach Aufgabe 41) ist das äquivalent zu

$$b(p,p) \cdot *q - b(q,p) \cdot *p = 0.$$

Wären $*q$ und $*p$ linear abhängig, so würde gleiches wegen der Linearität von $*$ auch für $q = - * (*q)$ und $p = - * (*p)$ gelten. Dann wäre aber $w = q \wedge p = 0$ im Widerspruch zur Annahme $w \neq 0$. Also sind $*q$ und $*p$ linear unabhängig. Aus der Formel folgt dann sofort $b(p,p) = 0 = b(q,p)$. Damit ist eine Richtung der Behauptung gezeigt.

Gibt es umgekehrt $q \in \mathbb{R}^4$ mit $b(q,p) = 0$ und $w = q \wedge p$ sowie $b(p,p) = 0$, so folgt daraus sofort $*(q \wedge p) \wedge p = 0$ und damit $*w \wedge p = 0$ einerseits und $w \wedge p = 0$ andererseits. $\square$

Aufgabe 43) Lösungsskizze: Die quadratische Form korrespondiert zu einer Bilinearform, die durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Die Matrix A lässt genau dann die Form q invariant, wenn ${}^tA \cdot B \cdot A = B$ gilt. Diese Bedingung ist zu den Gleichungen

$$a^2 - c^2 = 1, \qquad ab - cd = 0, \qquad b^2 - d^2 = -1$$

äquivalent. Aus der ersten Gleichung folgt: $(a-c) \cdot (a+c) = 1$. Mit $r = a+c$ ist dann also $r \in \mathbb{R}^*$ und $r^{-1} = a - c$. Daraus folgt schon mal $a = \frac{1}{2} \cdot (r + r^{-1})$ und $c = \frac{1}{2} \cdot (r - r^{-1})$. Entsprechend folgt aus $b^2 - d^2 = -1$ die Existenz eines $s \in \mathbb{R}^*$ mit $b = \frac{1}{2} \cdot (s - s^{-1})$ und $d = \frac{1}{2} \cdot (s + s^{-1})$. Aus der Gleichung $ab - cd = 0$ folgt dann $(r + r^{-1})(s - s^{-1}) - (r - r^{-1})(s + s^{-1}) = 0$, was zu $r^{-1}s = rs^{-1}$ bzw. zu $r^2 = s^2$ äquivant ist. Daraus folgt $s = \epsilon \cdot r$ mit $\epsilon = \pm 1$. Mit diesem ϵ folgt sofort $b = c \cdot \epsilon$ und $d = a \cdot \epsilon$. Dass für a, b, c, d dieser Gestalt die Form q invariant gelassen wird, folgt aus einer trivialen Rückrechnung. Weiterhin gilt:

$$\det(A) = ad - bc = a^2 \cdot \epsilon - c^2 \cdot \epsilon = \epsilon \cdot \frac{1}{4} \cdot \left((r + r^{-1})^2 - (r - r^{-1})^2\right) = \epsilon. \quad \square$$

Aufgabe 44) Lösungsskizze: (a) Es gilt $\omega = \omega_1 \wedge dx_3$ mit

$$\omega_1 = \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{x_1^1 + x_2^2}.$$

Deshalb ist $d\omega = d\omega_1 \wedge dx_3$. Es gilt $\omega_1 = \frac{1}{2} \cdot d\left(\log(x_1^2 + x_2^2)\right)$, woraus sofort $d\omega_1 = 0$ und damit $d\omega = 0$ folgt.

Es ist

$$*\omega = \frac{x_1 dx_0 \wedge dx_2 - x_2 dx_0 \wedge dx_1}{x_1^1 + x_2^2} = dx_0 \wedge \omega_2$$

mit $\omega_2 = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^1 + x_2^2}$. Dass $d\omega_2 = 0$ ist, wurde bereits in Aufgabe 12)(c) nachgerechnet. Es folgt $d(*\omega) = d(dx_0 \wedge \omega_2) = dx_0 \wedge d\omega_2 = 0$. $\square$

(b) Es ist in den Notationen der Aufgabe 43) zu berechnen:

$$A(r)^*(\omega) = A(r)^*(\omega_1) \wedge A(r)^*(dx_3).$$

Es gilt offensichtlich $A(r)^*(\omega_1) = \omega_1$ sowie

$$A(r)^*(dx_3) = d(c \cdot x_0 + d \cdot x_3) = c \cdot dx_0 + d \cdot dx_3 = \frac{1}{2}(r - r^{-1}) \cdot dx_0 + \frac{1}{2}(r + r^{-1}) \cdot dx_3.$$

Es folgt: $A(r)^*(\omega) = E_r \wedge dx_0 + B_r$ mit

$$E_r = \frac{1}{2}(r - r^{-1}) \cdot \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{x_1^1 + x_2^2}, \qquad B_r = \frac{1}{2}(r + r^{-1}) \cdot \omega. \quad \square$$