Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 10

Aufgabe 36) Lösung: Es gelte mit $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ die folgende Identität in $H^n(M)$:

$$x_1 \cdot [\omega_1] + \ldots + x_k \cdot [\omega_k] = 0.$$

Wir müssen daraus $x_1 = \ldots = x_k = 0$ herleiten.
Aus der Voraussetzung folgt, dass die Kohomologieklasse $[\omega]$ mit

$$\omega = x_1 \cdot \omega_1 + \ldots + x_k \cdot \omega_k$$

die Klasse der 0 ist. Das bedeutet, dass die Form ω exakt ist: $\omega = d\eta$ mit $\eta \in A^{n-1}(M)$. Wir betrachten für $i = 1, \ldots, k$ den Pullback $\phi_j^*(\omega) \in A^n(M_j)$ und berechnen das Integral über die kompakte Mannigfaltigkeit M mit Hilfe des Satzes von Stokes:

$$0 = \int_\emptyset \phi_j^*(\eta) = \int_{\partial M_j} \phi_j^*(\eta) = \int_{M_j} d\phi_j^*(\eta) = \int_{M_j} \phi_j^*(d\eta) = \int_{M_j} \phi_j^*(\omega)$$

$$= x_1 \cdot \int_{M_j} \phi_j^*(\omega_1) + \ldots + x_k \cdot \int_{M_j} \phi_j^*(\omega_k) = x_1 a_{1j} + \ldots + x_k a_{kj} = x \cdot a_j$$

mit dem Zeilenvektor $x = (x_1, \ldots, x_k)$ und dem Spaltenvektor

$$a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{kj})^t.$$

Da das für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt, folgt $x \cdot A = 0$. Da nach Voraussetzung die Matrix A invertierbar ist, folgt sofort $x = 0$. □

Aufgabe 37) Lösungsskizze: Da die Mannigfaltigkeit M nach Voraussetzung kompakt ist und keinen Rand hat, gilt: $H^i(M) = H_c^i(M)$. Weiterhin ist unter dieser Voraussetzung die Kohomologie ein endlich dimensionaler Vektorraum. Aus der Poincaré-Dualität folgt deshalb (man beachte, dass der

Dualraum eines endlich dimensionalen Vektorraums V dieselbe Dimension wie V hat):

$$\dim(H^i(M)) = \dim(H_c^{n-i}(M)^*) = \dim(H_c^{n-i}(M)) = \dim(H^{n-i}(M)).$$

(a) Sei $n = 2k + 1$ eine ungerade Zahl ($k \in \mathbb{N}$). Dann gilt:

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{2k+1} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M))$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M)) + \sum_{i=k+1}^{2k+1} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M))$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M)) + \sum_{i=k+1}^{2k+1} (-1)^i \cdot \dim(H^{2k+1-i}(M))$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M)) + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{2k+1-j} \cdot \dim(H^j(M)),$$

wobei wir im letzten Schritt den Summationsindex i durch den Index $j = 2k+1-i$ ersetzt haben: dann ist $i = 2k+1-j$. Wegen $(-1)^{2k+1-j} = -(-1)^j$ heben sich die beiden Summen gegenseitig auf, und es folgt $\chi(M) = 0$. $\square$

(b) Gilt $n = 4k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$, so liefert eine Rechnung wie in Teil (a):

$$\chi(M) =$$

$$\sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M)) + (-1)^{2k+1} \cdot \dim(H^{2k+1}(M)) + \sum_{i=2k+2}^{4k+2} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M))$$

$$= -\dim(H^{2k+1}(M)) + \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M)) + \sum_{i=2k+2}^{4k+2} (-1)^i \cdot \dim(H^{4k+2-i}(M))$$

$$= -\dim(H^{2k+1}(M)) + \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M)) + \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{4k+2-j} \cdot \dim(H^j(M))$$

$$= -\dim(H^{2k+1}(M)) + 2 \cdot \sum_{i=0}^{2k} (-1)^i \cdot \dim(H^i(M)),$$

wobei wir dieses mal die Substitution $i = 4k + 2 - j$ gemacht haben. Aus dieser Gleichung folgt: ist $\dim(H^{2k+1}(M))$ eine gerade ganze Zahl, so auch $\chi(M)$.

Wir betrachten jetzt das Cupprodukt:

$$\cup : \quad H^{2k+1}(M) \times H^{2k+1}(M) \to H^{4k+2}(M) \cong H_c^0(M)^* = (\mathbb{R})^* = \mathbb{R}.$$

Die Vertauschungregel für Differentialformen liefert dabei für $\alpha, \beta \in H^{2k+1}$:

$$\beta \cup \alpha = (-1)^{(2k+1)\cdot(2k+1)} \cdot \alpha \cup \beta = -\alpha \cup \beta.$$

Das Cupprodukt liefert also eine schiefsymmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $H^{2k+1}(M)$. Diese Bilinearform ist diejenige, die $H^{2k+1}(M)$ mit seinem Dualraum $H^{2k+1}(M)^*$ via Poincaré-Dualität identifiziert. Da die Poincaré-Dualität ein Isomorphismus ist, ist die Bilinearform nicht ausgeartet.

Bezüglich einer Basis $e_1, \ldots, e_m$ von $H^{2k+1}(M)$ wird das Cupprodukt als Bilinearform durch eine schiefsymmetrische Matrix $A \in M(m, m, \mathbb{R})$ beschrieben. Dass die Bilinearform nicht ausgeartet ist, bedeutet $\det(A) \neq 0$.

Nach Aufgabe 43) zur linearen Algebra II (SS 2006 Prof. Kreck) gibt es $g \in GL_m(\mathbb{R})$, so dass $g^t\ Ag$ eine Blockdiagonalmatrix ist, wobei auf der Diagonale nur die 2×2 Blöcke $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie Nullen vorkommen. Wegen $\det(g^t\ Ag) = \det(g)^2 \cdot \det(A) \neq 0$ können aber keine Nullen vorkommen. Deshalb muss $m = \dim(H^{2k+1}(M))$ als zweifaches der Anzahl der 2×2 Blöcke eine gerade Zahl sein. □

Aufgabe 38) Lösungsskizze: (a) Es gilt $\dim(H^1(M_i)) = 2$ für $i = 3, 4, 5$: das ist in Aufgabe 28)b) bereits für $M_3 = \mathbb{R}^3 \backslash (S_1 \cup G_1)$ und für $M_4 = \mathbb{R}^3 \backslash (G_1 \cup P \cup G_2)$ gezeigt worden. Für $M_5 = \mathbb{R}^3 \backslash (S_1 \cup G_2)$ folgt es mit derselben Überlegung wie bei M_3.

Da das $\wedge$-Produkt für 1 Formen antikommutativ ist, gilt $[\alpha] \wedge [\alpha] = 0$ für $[\alpha] \in H^1(M_i)$. Um zu zeigen, dass b_4 und b_5 die Nullabbildungen sind, genügt es deshalb sich zu überlegen, dass $[\alpha] \wedge [\beta] = 0$ für eine Basis $[\alpha], [\beta]$ von $H^1(M_i)$ gilt.

Wir bemerken, dass wir einen Basisvektor jeweils durch Pullback erhalten können: $\beta = \iota^*(\tilde{\beta})$, wobei $\iota : M_i \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash G_2$ die Einbettung und $[\tilde{\beta}]$ ein Erzeuger von $H^1(\mathbb{R}^3 \backslash G_2)$ ist.

Sei $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z < \frac{3}{2}\}$. Wir behaupten, dass die Inklusionsabbildung $j : V \cap M_i \to M_i$ eine Inklusion $j^* : H^2(M_i) \to H^2(V \cap M_i)$ induziert: der eindimensionale Vektorraum $H^2(M_i)$ lässt sich erzeugen von der Klasse einer Form ω, die auf $\mathbb{R}^3 \backslash P$ definiert ist: Ist S eine Sphäre, die ganz in $V \cap M_i$ enthalten ist und in deren Innerem P liegt, so gilt $\int_S \omega \neq 0$. (Die Sphäre S muss man für M_4 und für M_5 individuell konstruieren!) Wegen $\int_S (j^*\omega) = \int_S \omega$ repräsentiert dann aber auch $j^*\omega$ eine von Null verschiedene Klasse.
Wegen dieser Injektivität genügt es zu zeigen, dass

$$0 = j^*([\alpha] \wedge [\beta]) = j^*[\alpha] \wedge j^*[\beta] = j^*[\alpha] \wedge j^*(\iota^*[\tilde{\beta}])$$

gilt. Nun ist aber $j^*(\iota^*[\tilde{\beta}]) = (\iota \circ j)^*[\tilde{\beta}] = 0$, denn die Abbildung $\iota \circ j : V \cap M_i \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash G_2$ faktorisiert auch in der Form $V \cap M_i \hookrightarrow V \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \backslash G_2$ und die sternförmige Menge V hat nur triviale Kohomologie, d.h. $\tilde{\beta}$ wird beim Pullback nach V eine exakte Form und bleibt exakt beim Pullback nach $V \cap M_i$, repräsentiert dort also die Nullklasse. $\square$

(b) Eine Möglichkeit, die Behauptung einzusehen, besteht darin, dass man den Torus

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 1)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

betrachtet. Man überlegt sich, dass T eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand ist. Weiterhin überlegt man sich, dass die Einbettung $\iota : T \subset M_3$ durch Pullback einen Isomorphismus der Kohomologie induziert:

$$\iota^* : H^j(M_3) \simeq H^j(T) \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Man kann z.B. eine Abbildung in der umgekehrten Richtung $\pi : M_3 \to T$ definieren: für $Q \in M_3$ betrachte man die Halbebene H, die von G_1 begrenzt wird und auf der Q liegt. Diese Halbebene schneidet S^1 in genau einem Punkt Q'. Die Verbindungsgerade g zwischen Q' und Q schneidet dann innerhalb der Halbebene H den Torus in genau einem Punkt $\pi(Q)$.

Mit dieser Konstruktion ist klar, dass $\pi \circ \iota$ die Identität von T ist. Die Abbildung $\iota \circ \pi : M_3 \to M_3$ ist nicht die Identität, induziert auf der Kohomologie $H^i(M_3)$ die identische Abbildung. Das folgt daraus, dass es eine differenzierbare Abbildung $\phi : [0,1] \times M_3 \to M_3$ gibt mit $\phi(0,x) = x$ und $\phi(1,x) = \iota \circ \pi(x)$. Dann kann man Aufgabe 35)(b) anwenden. Man erhält insgesamt die Aussage, dass π und ι auf der Kohomologie zueinander inverse Abbildungen induzieren.

Diese Isomorphismen sind mit dem $\wedge$-Produkt kompatibel. Da für die zweidimensionale kompakte Mannigfaltigkeit T die Poincaré-Dualität gilt, ist das Cupprodukt

$$H^1(T) \times H^1(T) \to H^2(T) = \mathbb{R}$$

eine nicht ausgeartete Bilinearform. Da ι^* Isomorphismus induziert, folgt die Behauptung für das $\wedge$-Produkt auf M_3.

Wäre M_3 zu M_4 oder zu M_5 diffeomorph, so wären auch die Kohomologieringe mit der multiplikativen Struktur isomorph. Wir haben aber gesehen, dass die Abbildung $H^1(M_i) \times H^1(M_i) \to H^2(M_i)$ für $i = 4, 5$ die Nullabbildung ist, während sie für $i = 3$ nicht trivial ist. Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung, dass M_3 nicht zu M_4 und auch nicht zu M_5 diffeomorph sein kann. $\square$

Aufgabe 39) Lösungsskizze: (a) Durch $O_i = \{A \in M(n,n,\mathbb{R}) | a_{ii} \neq 0\}$ wird eine offene Teilmenge von $M(n,n,\mathbb{R})$ definiert. Es gilt $M_i = M \cap O_i$, und nach Definition der Unterraumtopologie ist M_i offen.

Da für alle $A \in M$ gilt $1 = Spur(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$ gibt es für jedes $A \in M$ ein i mit $1 \leq i \leq n$, so dass $a_{ii} \neq 0$ ist. Daraus folgt, dass M durch die offenen Mengen M_i überdeckt wird.

Die Abbildungsvorschrift, die ψ_i definiert, liefert nach den Permanenzsätzen eine stetige Abbildung von O_i nach $\mathbb{R}^{n-1}$. Ihre Einschränkung auf die Menge M_i ist ebenfalls stetig.

Für ein festes $1 \leq i \leq n$ setzen wir zunächst $b_i = 1$ und definieren dann

$$\sigma_i : \; U_i = \mathbb{R}^{n-1} \to M_i, \quad (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) \mapsto A = (a_{\mu\nu}) \quad \text{mit}$$

$$a_{\mu\nu} = \frac{b_\mu \cdot b_\nu}{b_1^2 + \ldots + b_n^2}.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass die Abbildung nach M_i geht: wegen $b_i = 1$ ist $b_1^2 + \ldots + b_n^2 \geq b_i^2 = 1$, d.h. der Nenner ist niemals 0. Die Matrix A ist offensichtlich symmetrisch und hat die Spur

$$Spur(A) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{b_\mu^2}{b_1^2 + \ldots + b_n^2} = 1.$$

Weiterhin hat die Matrix den Rang 1, da die μ-te Zeile jeweils das b_μ fache des Zeilenvektors $\left(\frac{b_1}{b_1^2+\ldots+b_n^2}, \ldots, \frac{b_n}{b_1^2+\ldots+b_n^2}\right)$ ist. Weiterhin ist $a_{ii} = \frac{1\cdot 1}{b_1^2+\ldots+b_n^2} \neq 0$. Damit ist gezeigt, dass σ_i eine Abbildung nach M_i ist. Sie ist nach den Permanenzsätzen stetig.

Wir zeigen jetzt, dass σ_i die zu ψ_i inverse Abbildung ist: Dass $\psi_i \circ \sigma_i$ die Identität ist, ist einfach: Gilt $A = (a_{\mu\nu}) = \sigma_i(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n)$, so wird der ν-te Koeffizient von $\psi_i(A)$ gegeben durch

$$a_{\nu i} \cdot (a_{ii})^{-1} = \frac{b_\nu \cdot b_i}{b_1^2 + \ldots + b_n^2} \cdot \left(\frac{b_i \cdot b_i}{b_1^2 + \ldots + b_n^2}\right)^{-1} = \frac{b_\nu}{b_i} = b_\nu$$

wegen $b_i = 1$.

Sei jetzt $b = (b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n) = \psi_i(C)$ für eine Matrix $C = (c_{\mu\nu}) \in M_i$. Wir berechnen die Koeffizienten der Matrix $A = (a_{\mu\nu}) = \sigma_i(b)$:
Da die Matrix C den Rang 1 hat, verschwinden alle 2×2 Unterdeterminanten. Das bedeutet insbesondere:

$$c_{\mu i}^2 = c_{\mu i} \cdot c_{i\mu} = c_{\mu\mu} \cdot c_{ii}.$$

Dann gilt aber

$$b_\mu^2 = \left(\frac{c_{\mu i}}{c_{ii}}\right)^2 = \frac{c_{\mu\mu} \cdot c_{ii}}{c_{ii}^2} = \frac{c_{\mu\mu}}{c_{ii}}.$$

Daraus folgt:

$$b_1^2 + \ldots + b_n^2 = \frac{(c_{11} + \ldots + c_{nn})}{c_{ii}} = \frac{Spur(C)}{c_{ii}} = c_{ii}^{-1}.$$

Damit ergibt sich:

$$a_{\mu\nu} = \frac{b_\mu \cdot b_\nu}{b_1^2 + \ldots + b_n^2} = b_\mu \cdot b_\nu \cdot c_{ii} = \frac{c_{\mu i}}{c_{ii}} \cdot \frac{c_{\nu i}}{c_{ii}} \cdot c_{ii} = \frac{c_{\mu i} \cdot c_{i\nu}}{c_{ii}} = c_{\mu\nu},$$

wobei wir in den letzten Schritten die Symmetrie und das Verschwinden der 2×2-Unterdeterminanten ausgenutzt haben.
Damit ist gezeigt, dass σ_i die zu ψ_i inverse Abildung ist.
Wir müssen uns jetzt noch davon überzeugen, dass die Kartenwechselabbildungen

$$\psi_{ij} = \psi_j \circ \psi_i^{-1} = \psi_j \circ \sigma_i : U_{ij} \to U_{ji}$$

glatt sind. Um die Darstellung etwas übersichtlicher zu gestalten, schreiben wir

$$U_i = \{b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n \mid b_i = 1\}.$$

Dann gilt:

$$\psi_{ij}(b_1, \dots, b_n) = \left(\frac{b_1}{b_j}, \dots, \frac{b_n}{b_j} \right)$$

und $U_{ij} = \{b = (b_1, \dots, b_n) \in U_i | b_j \neq 0\}$. Aus den Permanenzsätzen folgt dann sofort, dass jedes ψ_{ij} glatt ist. $\square$

(b) Da die offenen Mengen $U_i \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ zusammenhängend sind, besitzen sie genau zwei Orientierungen.
Die partiellen Ableitungen von ψ_{ij} nach den b_k sind von der Form $\frac{1}{b_j}$ mal dem k-ten Einheitsvektor im Falle $k \neq i, j$ sowie von der Form

$$\left(-\frac{b_1}{b_j^2}, \dots, -\frac{b_{i-1}}{b_j^2}, -\frac{1}{b_j^2}, -\frac{b_{i+1}}{b_j^2}, \dots, -\frac{b_n}{b_j^2} \right)$$

für $k = j$, wobei dann der j-te Eintrag $= 0$ ist. Für die Berechnung der Jacobi-Determinante zählt von diesem Zeilenvektor nur die i-te Komponente $-\frac{1}{b_j^2}$, da die übrigen Zeilen nur einen einzigen von 0 verschiedenen Eintrag haben. Die Jacobi-Determinante ergibt sich dann bis auf ein nur von i und j abhängiges Vorzeichen zu

$$-\frac{1}{b_j^2} \cdot \prod_{k \neq i,j} \frac{1}{b_j} = -\frac{1}{b_j^n}.$$

Für ungerades n wechselt die Jacobideterminante deshalb ihr Vorzeichen, wenn man von positiven b_j zu negativen b_j übergeht. Es ist deshalb unmöglich, die Orientierungen auf den U_i so zu wählen, dass die Kartenwechselabbildungen orientierungserhaltend sind.

Ist n dagegen gerade, so hat die Jacobideterminante auf der nicht zusammenhängenden Menge U_{ij} immer dasselbe Vorzeichen. Man kann deshalb die Orientierung auf den U_i für $i \geq 2$ so wählen, dass sie mit einer fest gewählten Orientierung von U_1 kompatibel sind. Dann sind aber alle U_i auch untereinander kompatibel orientiert, denn es gilt:

$$\psi_{ij} = \psi_{1j} \circ \psi_{i1} : \quad U_{ij} \cap U_{i1} \to U_{ji} \cap U_{j1}.$$

Da diese Durchschnitte nicht leer und offen sind, folgt aus der Kompatibilität von ψ_{i1} und ψ_{1j} mit den Orientierungen die Kompatibilität von ψ_{ij}.
Damit ist gezeigt, dass M im Falle n gerade orientierbar ist. $\square$

Bemerkung: Die Mannigfaltigkeit M ist diffeomorph zum sogenannten reellen projektive Raum $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$. Dieser ist definiert als die Menge aller eindimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Eine Matrix $A \in M$ kann in der Tat interpretiert werden als orthogonale Projektion auf einen eindimensionalen Unterraum: nach dem Spektralsatz kann jedes $A \in M$ mittels einer orthogonalen Matrix B in eine Diagonalmatrix D überführt werden. Wegen $Rang(A) = 1$ und $Spur(A) = 1$ hat man $n - 1$ Nullen und eine Eins als Diagonaleinträge von D. Die Matrix D projiziert auf den von einem Einheitsvektor erzeugten Unterraum. Die Matrix A projiziert auf den mittels B gedrehten Unterraum.