Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 9

Aufgabe 32) Lösungsskizze: Seien $U, V, U \cap V$ und $U \cup V$ kohomologie-endliche Mengen. Die Exaktheit der Mayer-Vietoris Sequenz lässt sich auch so formulieren, dass die Sequenz $0 \to W^0 \to W^1 \to \ldots \to W^{3n+2} \to 0$ exakt ist, wobei

$$W^{3\nu} = H^\nu(U \cup V), \qquad W^{3\nu+1} = H^\nu(U) \oplus H^\nu(V), \qquad W^{3\nu+2} = H^\nu(U \cap V)$$

für $0 \leq \nu \leq n$ ist.
Da die Kohomologie eines exakten Komplexes aus Nullvektorräumen besteht, folgt mit Hilfe von Aufgabe 29):

$$\sum_{i=0}^{3n+2} (-1)^i \cdot \dim(W^i) = \sum_{i=0}^{3n+2} (-1)^i \cdot \dim(H^i(W^\bullet)) = \sum_{i=0}^{3n+2} (-1)^i \cdot 0 = 0.$$

Einsetzen ergibt:

$$\sum_{i=0}^{3n+2} (-1)^i \cdot \dim(W^i)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{3\nu} \cdot \dim(W^{3\nu}) + \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{3\nu+1} \cdot \dim(W^{3\nu+1}) \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{3\nu+2} \cdot \dim(W^{3\nu+2})$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \cdot \dim(H^\nu(U \cup V)) - \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \cdot \dim(H^\nu(U) \oplus H^\nu(V))$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \cdot \dim(H^\nu(U \cap V)$$

$$= \chi(U \cup V) - \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \cdot (\dim(H^\nu(U)) + \dim(H^\nu(V))) + \chi(U \cap V)$$

$$= \chi(U \cup V) - \chi(U) - \chi(V) + \chi(U \cap V).$$

Da das nach obigem $= 0$ ist, folgt sofort die Behauptung

$$\chi(U \cup V) + \chi(U \cap V) = \chi(U) + \chi(V). \quad \square$$

Aufgabe 33) Lösungsskizze: (a) **Behauptung:** Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und disjunkt: $A \cap B = \emptyset$. Setze:

$$M_i = \mathbb{R}^n \backslash A_i \quad \text{für } i = 1, 2 \text{ sowie } M = M_1 \cap M_2 = \mathbb{R}^n \backslash (A_1 \cup A_2).$$

Dann gilt für $0 \leq i \leq n-1$:

$$H_c^i(M) \cong H_c^i(M_1) \oplus H_c^i(M_2).$$

Zusatz: Weiterhin hat man eine exakte Sequenz:

$$0 \to H_c^n(M_1 \cap M_2) \to H_c^n(M_1) \oplus H_c^n(M_2) \to \mathbb{R} \to 0.$$

Beweis: Wie in Aufgabe 28) sind wir in einer Situation, in der wir die Mayer-Vietoris-Sequenzen zur Verfügung haben mit $M_1 \cup M_2 = \mathbb{R}^n$ und $M = M_1 \cap M_2$. Die Sequenz für die Kohomologie mit kompaktem Träger impliziert für $i \geq 0$, wenn wir formal $H_c^{-1}(M_1 \cup M_2) = 0$ einführen, die Exaktheit der Sequenz:

$$H_c^{i-1}(M_1 \cup M_2) \to H_c^i(M_1 \cap M_2) \to H_c^i(M_1) \oplus H_c^i(M_2) \to H_c^i(M_1 \cup M_2).$$

Für $0 \leq i \leq n-1$ ist $H_c^i(M_1 \cup M_2) = H_c^i(\mathbb{R}^n) = 0$ und wir erhalten die Exaktheit von $0 \to H_c^i(M_1 \cap M_2) \to H_c^i(M_1) \oplus H_c^i(M_2) \to 0$, was nichts anderes ist als die behauptete Isomorphie.

Wegen $H_c^{n+1}(M_1 \cap M_2) = 0$ und $H_c^n(M_1 \cup M_2) = \mathbb{R}$ folgt aus der langen exakten Sequenz die Exaktheit der im Zusatz erwähnten Sequenz. $\square$

(b) Wir behaupten:

$$H_c^i(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k) = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{für } i = n, \text{ falls } k = n-1 \\ \mathbb{R} & \text{für } i = k+1 \text{ und für } i = n, \text{ falls } k < n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das wird wieder mit absteigender Induktion nach k bewiesen, wobei im Fall $k = n-1$ die Behauptung daraus folgt, dass $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-1}$ zu zwei Kopien des $\mathbb{R}^n$ diffeomorph ist.

Für den Induktionsschluss benutzen wir mit den Bezeichnungen in 26.2.1 die exakte Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$H_c^{i-1}(U) \oplus H_c^{i-1}(V) \to H_c^{i-1}(U \cup V) \to H_c^i(U \cap V) \to H_c^i(U) \oplus H_c^i(V)$$

für $i \leq n-1$. Aus der Sternförmigkeit von U und V folgt dabei $H_c^i(U) = H_c^i(V) = 0$ für $i \leq n-1$. Daraus ergibt sich für diese i die Isomorphie

$$H_c^{i-1}(U \cup V) \cong H_c^i(U \cap V).$$

Dabei ist $U \cup V = \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$ und $U \cap V = \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{k+1}$.
Der Rest der Mayer-Vietoris-Sequenz ist dann die exakte Sequenz

$$0 \to H_c^{n-1}(U \cup V) \to H_c^n(U \cap V) \to H_c^n(U) \oplus H_c^n(V) \to H_c^n(U \cup V) \to 0$$

Im Fall $k = n-2$ hat man wegen $H_c^n(\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{R}^2$ die folgende exakte Sequenz:

$$0 \to H_c^{n-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2}) \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to H_c^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2}) \to 0$$

Es müssen sowohl die Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ als auch die Abbildung nach $H_c^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2})$ nichttrivial sein: das folgt daraus, dass eine n-Form, die einen in einer einzigen Karte gelegenen kompakten Träger hat und sich dort in der Form $f \cdot dx_I$ mit einer nichtnegativen Funktion f darstellen lässt, eine nichttriviale Kohomologieklasse definiert (vgl. Aufgabe 34). Die Nullfortsetzung einer solchen Form ist dann ebenfalls eine nichttriviale Klasse.
Daraus folgt, dass im rechten Vektorraum $\mathbb{R}^2$ das Bild des einlaufenden und der Kern des auslaufenden Pfeils jeweils eindimensional sein müssen. Dann haben aber alle Abbildungen den Rang 1, und es folgt: $H_c^{n-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2}) \cong \mathbb{R} \cong H_c^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2})$.
Zusammen mit der Isomorphie

$$H_c^{i-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k) \cong H_c^i(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{k+1}) \quad \text{für } i \leq n-1$$

folgt damit die Beschreibung der Kohomologie von $\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-2}$.

Die weiteren Induktionsschritte betreffen dann den Übergang von $k+1$ nach k, wobei $k \leq n-3$ ist. Aus der soeben formulierten Isomophie folgt die Behauptung für $H_c^i(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k)$ im Falle $i \leq n-2$. Das Ende der Mayer-Vietoris-Sequenz für $k \leq n-3$ lautet:

$$0 \to H_c^{n-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k) \to H_c^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{k+1}) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to H_c^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k) \to 0$$

Da die Abbildung von $H_c^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{k+1}) = \mathbb{R}$ (Induktionsvoraussetzung) nach $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ nach obigem Argument nicht trivial und damit injektiv ist, folgt aus der Exaktheit, dass $H_c^{n-1}(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k) = 0$ und $H_c^n(\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k) = \mathbb{R}$ gilt.
Das ist aber die Behauptung in den restlichen Fällen.

Wir berechnen jetzt die Kohomologie mit kompaktem Träger von M_1, M_2, M_3 und M_4: Das geht mit Hilfe von Teil (a) (einschließlich Zusatz) zusammen mit den Ergebnissen von Teil (b) für offene Mengen der Form $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R}^k$. Da der Beweisgang genauso wie bei Aufgabe 28) ist, geben wir nur das Ergebnis an: Für alle $i = 1, 2, 3, 4$ gilt zunächst:

$$H_c^k(M_i) = 0 \quad \text{für } k = 0 \text{ und } k \geq 4, \qquad H_c^3(M_i) = \mathbb{R}.$$

Im Einzelnen ist dann

$$\begin{aligned} H_c^1(M_1) &= \mathbb{R} \qquad & H_c^2(M_1) &= \mathbb{R} \\ H_c^1(M_2) &= \mathbb{R} \qquad & H_c^2(M_2) &= \mathbb{R} \\ H_c^1(M_3) &= \mathbb{R} \qquad & H_c^2(M_3) &= \mathbb{R}^2 \\ H_c^1(M_4) &= \mathbb{R} \qquad & H_c^2(M_4) &= \mathbb{R}^2. \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 34) Lösungsskizze: Wir wählen Repräsentanten für die Kohomologieklassen ρ und ϕ und bezeichnen diese mit demselben Symbol, um die Notationen nicht zu überlasten: $\rho \in A^{\nu-1}(U \cap V)$ und $\phi \in A_c^{N-\nu}(U \cup V)$. Es gilt also $d\rho = 0$, $d\phi = 0$.
Weiterhin wählen wir nach dem Fortsetzungslemma 26.0.1 zwei Funktionen $\psi_U, \psi_V \in \mathcal{C}^\infty(U \cup V)$, so dass $1 = \psi_U + \psi_V$ gilt und so dass ψ_U auf $V \backslash (V \cap U)$ und ψ_V auf $U \backslash (U \cap V)$ verschwindet.
Dann gilt $\phi = \psi_U \phi + \psi_V \phi = NFS(\phi_U) - NFS(\phi_V)$, wobei $\phi_U \in A_c^{N-\nu}(U)$ die Einschränkung von $\psi_U \phi$ auf U ist und $\phi_V \in A_c^{N-\nu}(V)$ die Einschränkung von $-\psi_V \phi$ auf V. Aus $d\phi = 0$ folgt $NSF(d\phi_U) - NSF(d\phi_V) = 0$, was bedeutet, dass $d\phi_U$ und $d\phi_V$ dieselbe Einschränkung ϕ' auf $U \cap V$ besitzen. Nach der Konstruktion des Verbindungshomomorphismus δ_c wird $\delta_c(\phi)$ von der Klasse ϕ' repräsentiert.
Daraus folgt:

$$Tr_{U \cap V}(\rho \wedge \delta_c(\phi)) \ = \ \int_{U \cap V} \rho \wedge \phi' = \int_{U \cap V} \rho \wedge d(\psi_U \phi)$$

$$= \int_{U\cap V} \rho \wedge (\psi_U \cdot d\phi + d\psi_U \wedge \phi) = \int_{U\cap V} \rho \wedge d\psi_U \wedge \phi.$$

Wir berechnen als nächste $\delta(\rho)$: Es gilt

$$\rho = \psi_V \cdot \rho + \psi_U \cdot \rho = \rho_U|_{U\cap V} - \rho_V|_{U\cap V}$$

mit $\rho_U = NFS(\psi_V \cdot \rho) \in A^k(U)$ und $\rho_V = -NFS(\psi_U \cdot \rho) \in A^k(V)$. Aus $d\rho = 0$ folgt, dass die Einschränkungen von $d\rho_U$ und $d\rho_V$ auf $U \cap V$ übereinstimmen. Deshalb existiert eine Form $\rho' \in A^{k+1}(U \cup V)$, deren Einschränkung auf U gleich $d\rho_U$ und deren Einschränkung auf V gleich $d\rho_V$ ist.
Nach Konstruktion wird $\delta(\rho)$ von ρ' repräsentiert. Da ρ_U auf $U\backslash(U \cap V)$ verschwindet, gilt gleiches für $d\rho_U$. Entsprechend folgt, dass $d\rho_V$ auf $V\backslash(U\cap V)$ verschwindet. Damit hat ρ' einen Träger in $U \cap V$, so dass wir nur über $U \cap V$ integrieren müssen:
Damit gilt:

$$Tr_{U\cup V}(\delta(\rho) \wedge \phi) = \int_{U\cup V} \rho' \wedge \phi = \int_{U\cap V} \rho' \wedge \phi$$

$$= \int_{U\cap V} d(\psi_V \cdot \rho) \wedge \phi = \int_{U\cap V} (d\psi_V \wedge \rho + \psi_V \cdot d\rho) \wedge \phi = \int_{U\cap V} d\psi_V \wedge \rho \wedge \phi.$$

Aus $\psi_U + \psi_V = 1$ folgt $d\psi_V = -d\psi_U$. Nach der Vertauschungsregel für $\wedge$ gilt $d\psi_U \wedge \rho = (-1)^{\nu-1} \cdot \rho \wedge d\psi_U$. Deshalb ist:

$$Tr_{U\cup V}(\delta(\rho) \wedge \phi) = (-1)^{\nu} \cdot \int_{U\cap V} \rho \wedge d\psi_U \wedge \phi.$$

Zusammen mit der schon bewiesenen Formel für $Tr_{U\cap V}(\rho\wedge\delta_c(\phi))$ folgt daraus die Behauptung

$$Tr_{U\cap V}(\rho \wedge \delta_c(\phi)) = (-1)^{\nu} \cdot Tr_{U\cup V}(\delta(\rho) \wedge \phi). \quad \square$$

Aufgabe 35) Lösungsskizze: (a) Da alle Abbildungen linear sind, können wir uns wie im Beweis von Aufgabe 27) auf Formen von den beiden Typen $\omega = \omega_J \cdot dx_J \in A^k(I \times V)$ und $\omega = \widetilde{\omega}_J \cdot dt \wedge dx_J \in A^k(I \times V)$ beschränken:
Im ersten Fall wird ω durch η per Definition auf 0 abgebildet. Durch $(id\times\phi)^*$ wird ω aber wieder auf eine Form vom selben Typ abgebildet, d.h. auf eine

Form, die kein dt enthält: wegen der speziellen Gestalt der Abbildung $(id \times \phi)$ wird dt auf dt abgebildet und dx_i auf eine Linearkombination der dy_j. Damit wird dann auch $(id \times \phi)^*(\omega)$ durch η auf Null abgebildet.
Im Fall $\omega = \widetilde{\omega}_J \cdot dt \wedge dx_J$ bleiben wir mit unserer Argumentation sehr skizzenhaft: Der Pullback $(id \times \phi)^*$ wirkt nur auf die Differentiale dx_i, hat dort aber denselben Effekt wie der Pullback ϕ^*. Da die Abbildung η im Wesentliche eine Integration über t ist, kommutieren die η Abbildungen mit den Pullbackabbildungen. $\square$

(b) Sei $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ mit Kartenabbildungen $\psi_i : M_i \to U_i \subset \mathbb{R}^n$. Dann hat $I \times M$ eine Überdeckung durch $I \times M_i$ zusammen mit Kartenabbildungen $\psi_i' : I \times M_i \to I \times U_i$. Per Definition ist eine Differentialform $\omega \in A^k(M)$ eine Familie $\omega = (\omega_i)_{i \in I}$ mit $\omega_i \in A^k(U_i)$, die mit Pullback verträglich ist.
Aus (a) folgt, dass sich die Abbildungen $\eta : A^k(I \times U_i) \to A^{k-1}(U_i)$ zu einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $\eta : A^k(I \times M) \to A^{k-1}(M)$ zusammenfügen. Die Formel in Aufgabe 27)(a) überträgt sich sofort zu der Formel

$$f_1^* - f_0^* \quad = \quad d \circ \eta_i + \eta_{i+1} \circ d : \quad A^k(I \times M) \to A^k(M).$$

Aus dieser Formel folgt wie im Beweis von Aufgabe 27)(b) die Behauptung, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abbildungen f_0^* und f_1^* als Abbildungen von $H^k(I \times M)$ nach $H^k(M)$ übereinstimmen.

(c) Offensichtlich gilt $g_t = g \circ f_t$. Deshalb folgt aus (b):

$$g_0^* = (g \circ f_0)^* = f_0^* \circ g^* = f_1^* \circ g^* = (g \circ f_1)^* = g_1^*. \quad \square$$