Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 8

Aufgabe 28) Lösungsskizze: (a) Da A_1, A_2 und damit auch $A_1 \cup A_2$ abgeschlossen im $\mathbb{R}^n$ sind, sind M_1, M_2 und $M = M_1 \cap M_2$ im $\mathbb{R}^n$ offen. Es ist $M_1 \cup M_2 = \mathbb{R}^n$, da nach Voraussetzung $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gilt.

Damit können wir die Mayer-Vietoris-Sequenz anwenden und erhalten für alle $i \geq 0$ die Exaktheit von

$$H^i(M_1 \cup M_2) \to H^i(M_1) \oplus H^i(M_2) \to H^i(M_1 \cap M_2) \to H^{i+1}(M_1 \cup M_2).$$

Für $i \geq 1$ gilt aber $H^i(M_1 \cup M_2) = H^i(\mathbb{R}^n) = 0$, so dass die exakte Sequenz in diesem Fall lautet:

$$0 \to H^i(M_1) \oplus H^i(M_2) \ \to \ H^i(M) \to 0.$$

Exaktheit bei $H^i(M_1) \oplus H^i(M_2)$ bedeutet aber die Injektivität der mittleren Abbildung, Exaktheit bei $H^i(M)$ bedeutet die Surjektivität dieser Abbildung. Damit ist die mittlere Abbildung ein Isomorphismus. □

(b) Da alle vier Mannigfaltigkeiten zusammenhängend sind, gilt $H^0(M_j) = \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Es gilt nach (a) für $i \geq 1$:

$$H^i(M_1) = H^i(\mathbb{R}^3 \backslash G_1) \oplus H^i(\mathbb{R}^3 \backslash P)$$

Nun ist $H^i(\mathbb{R}^3 \backslash G_1) = \mathbb{R}$ für $i = 1$ und $H^i(\mathbb{R}^3 \backslash G_1) = 0$ für $i \geq 2$, weiterhin $H^i(\mathbb{R}^3 \backslash P) = \mathbb{R}$ für $i = 2$ und $H^i(\mathbb{R}^3 \backslash P) = 0$ für $i = 1$ und für $i \geq 3$.
Daraus folgt: $H^i(M_1) = \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$ und $H^i(M_1) = 0$ für $i \geq 3$.

Da M_2 zu M_1 diffeomorph ist, gilt $H^i(M_2) \cong H^i(M_1)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aus der Kohomologie von M_2 und von $H^i(\mathbb{R}^3 \backslash G_1)$ kann man jetzt die von M_3 berechnen:

$$H^1(M_3) = \mathbb{R}^2, \quad H^2(M_3) = \mathbb{R}, \quad H^i(M_3) = 0 \quad \text{für } i \geq 3.$$

Ebenso berechnet man die Kohomologie von M_4 aus der von M_1 und von $\mathbb{R}^3 \backslash G_2$ und bekommt dasselbe Ergebnis wie bei M_3:

$$H^1(M_4) = \mathbb{R}^2, \quad H^2(M_4) = \mathbb{R}, \quad H^i(M_4) = 0 \quad \text{für } i \geq 3. \quad \square$$

Aufgabe 29) Lösungsskizze: Sei $d^i : V^i \to V^{i+1}$. Dann ist $B^i = Bild(d^{i-1})$ ein Untervektorraum von $K^i = \ker(d^i)$, und es gilt per Definition: $H^i(V^\bullet) = K^i/B^i$.
Wir wenden jetzt die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $f : V \to W$ mehrfach an: $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(Bild(f))$: Wir erhalten einerseits für die Abbildungen d^i:

$$\dim(V^i) = \dim(K^i) + \dim(B^{i+1})$$

andererseits für die surjektive kanonische Abbildung $K^i \to H^i(V^\bullet)$:

$$\dim(K^i) = \dim(B^i) + \dim(H^i(V^\bullet)).$$

Damit können wir jetzt rechnen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(V^i) \quad &= \quad \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(K^i) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(B^{i+1}) \\ = \quad \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(B^i) &+ \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(H^i(V^\bullet)) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(B^{i+1}). \end{aligned}$$

Wegen $B^0 = 0$ und $B^{n+1} = 0$ können wir in der letzten Summe den Index i durch den Index $i-1$ ersetzen, ohne die Summationsgrenzen ändern zu müssen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(V^i) \quad &= \quad \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(B^i) + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(H^i(V^\bullet)) \\ + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i-1} \cdot \dim(B^i) \quad &= \quad \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \cdot \dim(H^i(V^\bullet)). \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 30) *Vorbemerkung:* Aus der linearen Algebra weiß man, dass ein Polynom n-ten Grades in jedem Körper maximal n Nullstellen hat: das zeigt man durch Induktion nach n, wobei der Induktionsanfang $n = 0$ trivial ist: Polynome vom Grad 0 sind die von 0 verschiedenen Konstanten, und diese haben keine Nullstellen.

Ist x_0 eine Nullstelle von f und hat f den Grad n, so lässt sich $f(x)$ in der Form $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ schreiben, wobei der Grad von g gleich $n-1$ ist. Aus der Nullteilerfreiheit eines Körpers folgt, dass jede von x_0 verschiedene Nullstelle von f auch eine Nullstelle von g ist. Weil es nach Induktionsvoraussetzung maximal $n - 1$ Nullstellen von g gibt, hat f maximal n Nullstellen.

Seien jetzt $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{C}$ die voneinander verschiedenen Nullstellen des Polynoms f vom Grad n. Sei

$$r_1 = \ldots = r_k = \frac{1}{3} \cdot \min_{1 \leq i < j \leq k} |x_i - x_j|,$$

$$r_0 = 1 + r_1 + \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|$$

Dann gilt $\overline{K_{r_i}(x_i)} \cap \overline{K_{r_j}(x_j)} = \emptyset$ für $1 \leq i < j \leq k$ sowie $\overline{K_{r_i}(x_i)} \subset K_{r_0}(x_0)$ für $1 \leq i \leq k$, d.h. die Voraussetzungen der Aufgabe 19) sind erfüllt. Wir versehen $M = \overline{K_{r_0}(x_0)} \setminus \bigcup_{i=1}^k K_{r_i}(x_i)$ mit der in Aufgabe 19) eingeführten Struktur einer Mannigfaltigkeit mit Rand.
Die Differentialform

$$\omega = \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

ist auf $G = \mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ definiert und dort geschlossen, da nach Aufgabe 18)b) die Funktion $\frac{f'(z)}{f(z)}$ holomorph ist. Wegen $M \subset G$ können wir den Satz von Stokes anwenden:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = \int_M 0 = 0.$$

Als orientierte Mannigfaltigkeit haben wir:

$$\partial M = \partial K_{r_0}(x_0) - \partial K_{r_1}(x_1) - \ldots - \partial K_{r_k}(x_k),$$

so dass wir diese Identität auch folgendermaßen schreiben können:

$$\int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \omega \quad = \quad \int_{\partial K_{r_1}(x_1)} \omega + \ldots + \int_{\partial K_{r_k}(x_k)} \omega.$$

Sei n_j die Vielfachheit der Nullstelle x_j von f, d.h. es sei

$$f(z) = (z - x_j)^{n_j} \cdot g_j(z)$$

mit $g_j(z_j) \neq 0$. Dann haben wir nach Aufgabe 25):

$$\omega = n_j \cdot \frac{dz}{z - x_j} + \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} dz.$$

Da f in $K_{r_j}(x_j)$ nur x_j als einzige Nullstelle hat, ist $\frac{g_j'(z)}{g_j(z)} dz$ eine auf $K_{r_j}(x_j)$ definierte geschlossene Form, denn der Nenner hat dort überhaupt keine Nullstelle. Also können wir unter Benutzung von Aufgabe 25)a) und des Satzes von Stokes berechnen:

$$\int_{\partial K_{r_j}(x_j)} \omega = \int_{\partial K_{r_j}(x_j)} n_j \cdot \frac{dz}{z - z_j} + \int_{\partial K_{r_j}(x_j)} \frac{g_j'(z)}{g_j(z)} dz$$

$$= 2\pi i \cdot n_j + \int_{K_{r_j}(x_j)} d\left(\frac{g_j'(z)}{g_j(z)} dz\right) = 2\pi i \cdot n_j + \int_{K_{r_j}(x_j)} 0 = 2\pi i \cdot n_j.$$

Um das Integral $\int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \omega$ zu berechnen, machen wir den Pullback mittels der Abbildung I aus Aufgabe 18) c):

$$\int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \omega = \int_{I^{-1}(\partial K_{r_0}(x_0))} I^* \omega.$$

Dabei ist $I^{-1}(\partial K_{r_0}(0)) = -\partial K_{r_0^{-1}}(0)$, d.h. bei Anwendung von I wird die Orientierung umgedreht. Deshalb gilt:

$$\int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \omega = -\int_{\partial K_{r_0^{-1}}(0)} I^* \omega$$

$$= -\int_{\partial K_{r_0^{-1}}(0)} \frac{g'(w)}{g(w)} \cdot dw - \int_{\partial K_{r_0^{-1}}(0)} (-n \cdot \frac{dw}{w}).$$

Das erste Integral ist nach dem Satz von Stokes $= 0$, denn $g(w)$ hat bei $w = 0$ keine Nullstelle wegen $g(0) = 1$ und für $0 < |w| \leq r_0^{-1}$ hat $g(w)$ keine Nullstelle, weil $f(z)$ im Bereich $|z| \geq r_0$ keine Nullstellen hat. Damit ist

$\frac{g'(w)}{g(w)} \cdot dw$ nach Aufgabe 18)b) in $K_{r_0^{-1}}(0)$ eine geschlossene Differentialform. Es folgt:

$$\int_{\partial K_{r_0}(x_0)} \omega = \int_{\partial K_{r_0^{-1}}(0)} n \cdot \frac{dw}{w} = 2\pi i \cdot n.$$

Die Ergebnisse der Rechnungen kann man in der Form

$$2\pi i \cdot n = 2\pi i \cdot n_1 + \ldots + 2\pi i \cdot n_k$$

zusammenfassen. Daraus folgt nach Kürzen mit $2\pi i$:

$$n = n_1 + \ldots + n_k. \quad \square$$

Aufgabe 31) Lösungsskizze: (a) Die Produkttopologie macht P nach Aufgabe 20)b) zu einem separierten lokalkompakten Raum, der abzählbar im Unendlichen ist. Nach Aufgabe 20)a) sind die W_k in P offen.
Weiterhin gilt

$$\bigcup_{k\in K} P_k = \bigcup_{i\in I, j\in J} M_i \times N_j = \left(\bigcup_{i\in I} M_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} N_j\right) = M \times N = P.$$

Also bilden die P_k eine offene Übedeckung von P.
Wir müssen jetzt noch zeigen, dass die Kartenwechselabbildungen differenzierbar sind: Sei $P_k \cap P_{\tilde{k}} \neq \emptyset$. Das bedeutet mit $k = (i, j)$ und $\tilde{k} = (\tilde{i}, \tilde{j})$:

$$\emptyset \neq (M_i \times N_j) \cap (M_{\tilde{i}} \times N_{\tilde{j}}) = (M_i \cap M_{\tilde{i}}) \times (N_j \cap N_{\tilde{j}}).$$

Daraus folgt: $M_i \cap M_{\tilde{i}} \neq \emptyset$ und $N_j \cap N_{\tilde{j}} \neq \emptyset$.
Es ist dann

$$W_{k\tilde{k}} = \sigma_k(P_k \cap P_{\tilde{k}}) = (\phi_i, \psi_j)((M_i \cap M_{\tilde{i}}) \times (N_j \cap N_{\tilde{j}})$$
$$= (\phi_i(M_i \cap M_{\tilde{i}})) \times \big(\psi_j(N_j \cap N_{\tilde{j}})\big) = U_{i\tilde{i}} \times V_{j\tilde{j}}.$$

Wir müssen jetzt überprüfen, dass die Kartenwechselabbildungen

$$\sigma_{k\tilde{k}} : W_{k\tilde{k}} = \sigma_k(P_k \cap P_{\tilde{k}}) \to W_{\tilde{k}k} = \sigma_{\tilde{k}}(P_k \cap P_{\tilde{k}})$$

mit $\sigma_{k\tilde{k}} = \sigma_{\tilde{k}} \circ \sigma_k^{-1}$ glatt sind: Es gilt aber für

$$(u, v) \in W_{k\tilde{k}} = \sigma_k(P_k \cap P_{\tilde{k}}) \subset W_k = U_i \times V_j :$$

$$\sigma_{k\tilde{k}}(u,v) = (\sigma_{\tilde{k}} \circ \sigma_k^{-1})(u,v) = (\phi_i(\phi_{\tilde{i}}^{-1}(u)), \psi_j(\psi_{\tilde{j}}^{-1}(v)))$$

$$= (\phi_{i\tilde{i}}(u), \psi_{j\tilde{j}}(v).$$

Weil die Abbildungen $\phi_{i\tilde{i}}$ und $\psi_{j\tilde{j}}$ glatt, also beliebig oft stetig differenzierbar sind, gilt gleiches für die Abbildung $\sigma_{k\tilde{k}}$. □

(b) Um Kollisionen mit den Abbildungen Sigma aus Teil (a) zu vermeiden, benutzen wir die Notation:

$$\tau_k = \pi_1^*(\omega_i) \wedge \pi_2^*(\eta_j) \in A^{\alpha+\beta}(W_k).$$

Wir müssen dann $\tau = (\tau_k)_{k \in K} \in A^{\alpha+\beta}(P)$ zeigen: Das bedeutet:

$$\sigma_{k\tilde{k}}^*(\tau_{\tilde{k}}) = \tau_k$$

auf $W_{k\tilde{k}} \subset W_k$. Nun gilt mit $k = (i,j)$ und $\tilde{k} = (\tilde{i}, \tilde{j})$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{k\tilde{k}}^*(\tau_{\tilde{k}}) &= \sigma_{k\tilde{k}}^*(\pi_1^*(\omega_{\tilde{i}}) \wedge \pi_2^*(\eta_{\tilde{j}})) \\
&= \sigma_{k\tilde{k}}^*(\pi_1^*(\omega_{\tilde{i}})) \wedge \sigma_{k\tilde{k}}^*(\pi_2^*(\eta_{\tilde{j}})) \\
&= (\pi_1 \circ \sigma_{k\tilde{k}})^*(\omega_{\tilde{i}}) \wedge (\pi_2 \circ \sigma_{k\tilde{k}})^*(\eta_{\tilde{j}}) \\
&= (\phi_{i\tilde{i}} \circ \pi_1)^*(\omega_{\tilde{i}}) \wedge (\psi_{j\tilde{j}} \circ \pi_2)^*(\eta_{\tilde{j}}) \\
&= \pi_1^*(\phi_{i\tilde{i}}^*(\omega_{\tilde{i}})) \wedge \pi_2^*(\psi_{j\tilde{j}}^*(\eta_{\tilde{j}})) \\
&= \pi_1^*(\omega_i) \wedge \pi_2^*(\eta_j) \quad = \quad \tau_k \quad .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass die Gleichung

$$\sigma_{k\tilde{k}}(u,v) = (\phi_{i\tilde{i}}(u), \psi_{j\tilde{j}}(v))$$

zu den Identitäten $\pi_1 \circ \sigma_{k\tilde{k}} = \phi_{i\tilde{i}} \circ \pi_1$ und $\pi_2 \circ \sigma_{k\tilde{k}} = \psi_{j\tilde{j}} \circ \pi_2$ äquivalent ist. Aus obiger Gleichung folgt sofort, dass τ eine Differentialform auf P definiert.

□