Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 7

Aufgabe 24) Lösungsskizze: Wir müssen voraussetzen, dass die Mannigfaltigkeit orientiert ist.

Sei $(\phi_i)_{i=1,\ldots,N}$ eine Partition der Eins, die der Überdeckung $M = \bigcup_{i=1}^N M_i$ untergeordnet ist, d.h. es gilt $\phi_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $\sum_{i=1}^N \phi_i(x) = 1$, und $K_i = supp(\phi_i)$ ist eine kompakte Teilmenge von M_i.

Wird die Differentialform ω durch das Tupel (ω_i) beschrieben, so gilt per Definition, wenn $\psi_i : M_i \to U_i \subset \mathbb{R}^n$ die Kartenabbildungen sind:

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \phi_i(\psi_i^{-1}(x)) \cdot \omega_i.$$

Die Integrierbarkeit ergibt sich daraus, dass $\phi_i \circ \psi_i^{-1}$ einen in U_i kompakten Träger hat und dass über eine stetige Form integriert wird. Da $A_i \subset U_i \subset \mathbb{R}^n$ für $i \geq 2$ eine Nullmenge ist, kann man das Integral über U_i ersetzen durch das Integral über $U_i \backslash A_i = U_{i1}$:

$$\int_{U_i} \phi_i(\psi_i^{-1}(x)) \cdot \omega_i = \int_{U_{i1}} \phi_i(\psi_i^{-1}(x)) \cdot \omega_i.$$

Nun ist $\psi_{1i} : U_{1i} \to U_{i1}$ per Definition ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus. Aus der Transformationsformel folgt sofort

$$\int_{U_{i1}} \phi_i(\psi_i^{-1}(x)) \cdot \omega_i = \int_{U_{1i}} \psi_{1i}^* \big(\phi_i(\psi_i^{-1}(x)) \cdot \omega_i\big)$$

$$= \int_{U_{1i}} \big(\phi_i(\psi_i^{-1}(\psi_{1i}(x)))\big) \cdot \psi_{1i}^* \omega_i = \int_{U_{1i}} \big(\phi_i(\psi_1^{-1}(x))\big) \cdot \omega_1.$$

Die Transformationsformel impliziert insbesondere auch die Existenz des Integrals. Da der Träger von ϕ_i kompakt in M_i liegt, gilt $\phi_i(\psi_1^{-1}(x)) = 0$ für

$x \in U_1 \backslash U_{1i}$, so dass man das Integral ersetzen kann durch ein Integral mit Integrationsbereich U_1.
Insgesamt folgt:

$$\int_M \omega = \int_{U_1} \phi_1(\psi_1^{-1}(x)) \cdot \omega_1 + \sum_{i=2}^N \int_{U_i} \phi_i(\psi_i^{-1}(x)) \cdot \omega_i$$

$$= \int_{U_1} \phi_1(\psi_1^{-1}(x)) \cdot \omega_1 + \sum_{i=2}^N \int_{U_1} \phi_i(\psi_1^{-1}(x)) \cdot \omega_1$$

$$= \int_{U_1} \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(\psi_1^{-1}(x)) \right) \cdot \omega_1 = \int_{U_1} 1 \cdot \omega_1 = \int_{U_1} \omega_1.$$

Die Existenz des letzten Integrals folgt dabei aus den vorherigen Überlegungen zusammen mit der Vektorraumstruktur der integrierbaren Funktionen. $\square$

Aufgabe 25) Lösungsskizze: (a) Der Rand S der Kreisscheibe vom Radius r ist eine Mannigfaltigkeit, die zur S^1 diffeomorph ist. Man kann sie durch zwei offene Mengen $S = M_1 \cup M_2$ überdecken, wobei $M_1 = S \backslash \{z_0 + r\}$ sowie $M_2 = S \backslash \{z_0 - r\}$ sei und wobei die Inversen der Kartenabbildungen folgendermaßen aussehen:

$$\psi_1^{-1} : U_1 = (0, 2\pi) \to S, \quad \phi \mapsto z_0 + r \cdot e^{i\phi}$$

$$\psi_2^{-1} : U_2 = (0, 2\pi) \to S, \quad \phi \mapsto z_0 - r \cdot e^{i\phi}.$$

Dann gilt in den Notationen von Aufgabe 24): $A_2 = \{\pi\}$ und dies ist eine Lebesgue-Nullmenge in U_2.
Somit kann man Aufgabe 24) anwenden und erhält:

$$\int_S \frac{dz}{z - z_0} = \int_{(0,2\pi)} (\psi_1^{-1})^* \left(\frac{dz}{z - z_0} \right) = \int_0^{2\pi} \frac{d(z_0 + r \cdot e^{i\phi})}{r \cdot e^{i\phi}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r \cdot i \cdot e^{i\phi} \cdot d\phi}{r \cdot e^{i\phi}} = \int_0^{2\pi} i \cdot d\phi = 2\pi \cdot i.$$

(b) Für zwei Polynome $P(z)$ und $Q(z)$ überlegt man sich folgendermaßen die Produktregel für das formale Ableiten von Polynomen

$$(PQ)'(z) = P'(z) \cdot Q(z) + P(z) \cdot Q'(z) :$$

beide Seiten sind $\mathbb{C}$-linear in P und in Q, so dass es genügt, die Identität für Monome $P(z) = z^\alpha, Q(z) = z^\beta$ zu zeigen. Dann lautet die Identität aber

$$(\alpha + \beta) \cdot z^{\alpha+\beta-1} = \alpha z^{\alpha-1} \cdot z^\beta + z^\alpha \cdot \beta z^{\beta-1},$$

was offensichtlich stimmt. Aus der Produktregel folgt durch vollständige Induktion sofort, dass $k \cdot (z - z_0)^{k-1}$ die formale Ableitung des Polynoms $(z - z_0)^k$ ist.
Aus der Identität

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$$

folgt dann durch formales Differenzieren unter Benutzung der Produktregel:

$$f'(z) = k \cdot (z - z_0)^{k-1} \cdot g(z) + (z - z_0)^k \cdot g'(z).$$

Teilt man diese Gleichung auf beiden Seiten durch $f(z)$ und benutzt auf der rechten Seite die Ausgangsgleichung, so erhält man

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = k \cdot \frac{1}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

woraus die Behauptung nach Multiplikation mit dz folgt. $\square$

Aufgabe 26) Lösungsskizze: *erste Lösung:* Wir überdecken S^2 durch die offenen Mengen $M_1 = S^2 \backslash \{(0,0,1)\}$ und $M_2 = S^2 \backslash \{(0,0,-1)\}$. Wir modifizieren die Konstruktion aus Aufgabe 17) ein wenig, indem wir die erste Koordinate des $\mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 17) als letzte Koordinate auffassen.
Dann ist die inverse Koordinatenabbildung $\psi_1^{-1} : U_1 = \mathbb{R}^2 \to M_1$ gerade die in Aufgabe 10) betrachtete Abbildung f.
Da die beiden Karten unterschiedliche Orientierungen haben, versehen wir ψ_1 noch mit einem Minuszeichen, um S^2 als orientierte Mannigfaltigkeit zu erhalten.
Es gilt $A_2 = U_2 \backslash \psi_2(M_1 \cap M_2) = \psi_2(0,0,1) = \{(0,0)\}$, so dass A_2 eine Lebesgue-Nullmenge ist.
Damit kann man Aufgabe 24) anwenden: Es gilt

$$\int_{S^2} \omega = -\int_{U_1} f^*\omega = \int_{\mathbb{R}^2} 4 \cdot \frac{du \wedge dv}{(u^2 + v^2 + 1)^2}$$

Und das ist nach Aufgabe 41) aus Ana 2) gleich 4π. $\square$

zweite Lösung, skizziert:
Um Aufgabe 4) anwenden zu können, fügen wir eine weitere Karte

$$\psi_3 = k^{-1} : M_3 \to U_3 = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$$

hinzu. Dabei ist $M_3 = S^2 \backslash \{(x, 0, z) \in S^2 | x \geq 0\}$.
Man rechnet leicht nach, dass diese Karte mit den vorherigen Karten kompatibel ist. Da das Komplement von M_3 in den beiden anderen Karten jeweils eine Nullmenge ist, können wir wieder Aufgabe 24) (aber diesmal mit M_3 in der Rolle von M_1) anwenden und die Integration durch ein Integral von $k^*\omega$ über U_3 ersetzen.
Es ist

$$\psi_1 \circ k : U_3 \to U_1, \quad (\psi, \phi) \mapsto \frac{(\cos\phi \cdot \cos\psi, \cos\phi \cdot \sin\psi)}{1 - \sin\phi}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt, dass diese Abbildung orientierungserhaltend ist. Wir versehen deshalb auch diese Karte mit einem negativen Vorzeichen und erhalten:

$$\begin{aligned}
\int_{S^2} \omega = -\int_{U_3} k^*\omega &= -\int_{U_3} -\cos\phi \cdot d\phi \wedge d\psi \\
= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos\phi \; d\psi \; d\phi &= 2\pi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi d\phi \\
= 2\pi \cdot \sin\phi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} &= 2\pi \cdot (1 - (-1)) = 4\pi.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 27) Lösungsskizze: (a) die zu beweisende Identität ist offensichlich $\mathbb{R}$-linear auf beiden Seiten, so dass es genügt, die Wirkung beider Seiten auf eine Differentialform der Gestalt $\omega_J \cdot dx_J$ bzw. der Gestalt $\widetilde{\omega}_J \cdot dt \wedge dx_J$ auszurechnen:

$$\begin{aligned}
&(d \circ \eta_i + \eta_{i+1} \circ d)(\omega_J \cdot dx_J) \\
&= d(0) + \eta_{i+1}\left(\sum_{j \notin J} \frac{\partial \omega_J}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_J + \frac{\partial \omega_J}{\partial t} dt \wedge dx_J\right)
\end{aligned}$$

$$= \quad \eta_{i+1}\left(\frac{\partial \omega_J}{\partial t} dt \wedge dx_J\right) \quad = \quad \int_0^1 \frac{\partial \omega_J}{\partial t} dt \cdot dx_J$$
$$= \omega_J(1,x)dx_J - \omega_J(0,x)dx_J = (\phi_1^* - \phi_0^*)(\omega_J \cdot dx_J).$$

Für den anderen Typ von Formen folgt:

$$(d \circ \eta_i + \eta_{i+1} \circ d)\left(\widetilde{\omega_J} \cdot dt \wedge dx_J\right)$$

$$= d\left(\int_0^1 \widetilde{\omega_J}(t,x)\ dt \cdot dx_J\right) + \eta\left(\sum_{j\notin J} \frac{\partial \widetilde{\omega_J}}{\partial x_j} dx_j \wedge dt \wedge dx_J\right)$$
$$= \sum_{j\notin J} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_0^1 \widetilde{\omega_J}(t,x)\ dt\right) \cdot dx_j \wedge dx_J - \sum_{j\notin J} \eta\left(\frac{\partial \widetilde{\omega_J}}{\partial x_j} dt \wedge dx_j \wedge dx_J\right)$$
$$= \sum_{j\notin J} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_0^1 \widetilde{\omega_J}(t,x)\ dt\right) \cdot dx_j \wedge dx_J - \sum_{j\notin J}\left(\int_0^1 \frac{\partial \widetilde{\omega_J}}{\partial x_j} dt\right) \cdot dx_j \wedge dx_J$$

Nach der Vertauschungsregel für Differentiation und Integration bezüglich verschiedener Variablen (Kapitel 19.5) ist dieser Ausdruck aber 0 und damit gleich

$$(\phi_1^* - \phi_0^*)(\widetilde{\omega_J} \cdot dt \wedge dx_J),$$

denn es ist $\phi_{t_0}^*(dt) = 0$ für jedes feste $t_0 \in I$, insbesondere für $t_0 = 0$ und $t_0 = 1$. Damit ist

$$(d \circ \eta_i + \eta_{i+1} \circ d)(\omega) = (\phi_1^* - \phi_0^*)(\omega)$$

auch im Fall $\omega = \widetilde{\omega_J} \cdot dt \wedge dx_J$ gezeigt. □

(b) Die Klasse von $[\omega] \in H^i(I \times U)$ werde durch $\omega \in A^i(I \times U)$ mit $d\omega = 0$ repräsentiert. Dann gilt nach dem eben bewiesenen:

$$\phi_1^*(\omega) - \phi_0^*(\omega) = d(\eta_i(\omega)) + \eta_{i+1}(d\omega) = d(\eta_i(\omega)) + 0 = d(\tilde{\omega})$$

mit $\tilde{\omega} = \eta_i(\omega) \in A^{i-1}(U)$. Daraus folgt, dass $\phi_1^*(\omega)$ und $\phi_0^*(\omega)$ dieselbe Kohomogieklasse in $H^i(U)$ repräsentieren. Die beiden Abbildungen ϕ_1^* und ϕ_0^* induzieren deshalb dieselbe Abbildung für die Kohomologie.

(c) Es gilt $(\psi \circ \phi_0)(x) = \psi(\phi_0(x)) = \psi(0,x) = 1 \cdot x + 0 \cdot P = x$, also $\psi \circ \phi_0 = id$ und dementsprechend $\phi_0^* \circ \psi^* = (\psi \circ \phi_0)^* = id^* = id$.

Weiterhin ist

$$(\psi \circ \phi_1)(x) = \psi(\phi_1(x)) = \psi(1, x) = 0 \cdot x + 1 \cdot P = P,$$

d.h. $\psi \circ \phi_1$ ist eine konstante Abbildung. Ihre Wirkung beim Pullback von i-Formen ist deshalb 0 für $i \geq 1$. Daraus folgt $\phi_1^* \circ \psi^* = (\psi \circ \phi_1)^* = 0$.

Ein Vektorraum, auf dem die Identität dieselbe Abbildung induziert wie die Nullabbildung, ist aber der Nullvektorraum: Für $x \in H^i(U)$ hat man nämlich: $x = id(x) = \phi_0^* \circ \psi^*(x) = \phi_1^* \circ \psi^*(x) = 0(x) = 0$. Dann ist $H^i(U) = 0$ für $i \geq 1$. Das bedeutet $\ker(d^i) = Bild(d^{i-1})$ für $i \geq 1$. Das ist aber die Aussage des Lemmas von Poincaré für sternförmige offene Mengen.