Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 6

Aufgabe 19) Lösungsskizze: M ist als Teilmenge der beschränkten Teilmenge $\overline{K_{r_0}(x_0)}$ beschränkt. M ist als Durchschnitt der abgeschlossenen Teilmenge $\overline{K_{r_0}(x_0)}$ mit den Komplementen der offenen Teilmengen $K_{r_i}(x_i)$ ebenfalls abgeschlossen. Damit ist M nach dem Satz von Heine-Borel kompakt.

Auf M' ist per Definition die Identität eine Karte. Für einen Punkt $\xi \in M \backslash M'$ müssen wir jetzt eine in M offene Menge M_ξ zusammen mit einer Kartenabbildung $\psi_\xi : M_\xi \to U_\xi \subset H$ finden, wobei U_ξ in

$$H = \{(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n | \eta_1 \leq 0\}$$

offen sein soll.
Wir nehmen an, dass $n \geq 2$ gilt, da M ansonsten eine endliche Vereinigung abgeschlossener Intervalle ist. Dieser einfache Fall bereitet keine Schwierigkeiten.

Sei zunächst $\xi \in \overline{K_{r_0}(x_0)} \backslash K_{r_0}(x_0)$, also $d(\xi, x_0) = r_0$. Nach Vertauschung von Koordinaten und Ausführen einer Translation sowie eventuellem Übergang zum Negativen in einer Koordinate, also einer affin linearen Koordinatentransformation τ können wir o.B. d.A. annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt und außerdem $\xi_1 > 0$ gilt. Hierbei ist $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Für $\epsilon > 0$ setzen wir

$$U_{\xi,\epsilon} = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n | \quad |\zeta_1 - \xi_1| < \epsilon, \quad \sum_{i=2}^n (\zeta_i - \xi_i)^2 < \epsilon^2\}$$

Dann ist $M \cap U_{\xi,\epsilon}$ eine in M offene Umgebung von ξ. Wir behaupten, dass für hinreichend kleines ϵ gilt $M \cap U_{\xi,\epsilon} = \tilde{M}_{\xi,\epsilon}$ mit

$$\tilde{M}_{\xi,\epsilon} = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in U_{\xi,\epsilon} | \quad \sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \leq r_0^2\}.$$

Die Bedingung $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in M$ ist zu $d(\zeta, x_0) \leq r_0$ und $d(\zeta, x_i) > r_i$ für $1 \leq i \leq k$ äquivalent.

Aus $\overline{K_{r_i}(x_i)} \subset K_{r_0}(x_0)$ für $1 \leq i \leq k$ folgt, dass für hinreichend kleines ϵ die Bedingungen $d(\zeta, x_i) > r_i$ automatisch erfüllt sind, wenn $\zeta \in U_{\xi,\epsilon}$ gilt. Die Bedingung $d(\zeta, x_0) \leq r_0$ bedeutet aber gerade $\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \leq r_0^2$.

Wir setzen jetzt voraus, dass $\epsilon < \xi_1$ sowie $\epsilon < r_0 - \sqrt{r_0^2 - \xi_1^2}$ gilt.
Aus der ersten Ungleichung folgt, dass $\zeta_1 > 0$ für alle $\zeta \in U_{\xi,\epsilon}$ ist. Aus der zweiten folgt zusammen mit der Dreiecksungleichung, dass für alle $\zeta \in U_{\xi,\epsilon}$ gilt:

$$\sqrt{\sum_{i=2}^n \zeta_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=2}^n (\zeta_i - \xi_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=2}^n \xi_i^2} < \epsilon + \sqrt{r_0^2 - \xi_1^2} < r_0,$$

d.h. für alle $\zeta \in U_{\xi,\epsilon}$ ist $r_0^2 - \zeta_2^2 - \ldots - \zeta_n^2 > 0$.

Deshalb ist auf $U_{\xi,\epsilon}$ die Abbildung

$$\sigma : (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \mapsto (\zeta_1 - \sqrt{r_0^2 - \zeta_2^2 - \ldots - \zeta_n^2},\ \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$$

definiert. Sie vermittelt einen Diffeomorphismus mit dem Bild $\sigma(U_{\xi,\epsilon})$, welches eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$ ist.
Für $\zeta \in U_{\xi,\epsilon}$ ist $\sum_{i=1}^n \zeta_i^2 \leq r_0^2$ äquivalent zu $\zeta_1^2 \leq r_0^2 - \sum_{i=2}^n \zeta_i^2$ bzw. $\zeta_1 \leq \sqrt{r_0^2 - \sum_{i=2}^n \zeta_i^2}$, was wiederum zu $\sigma(\zeta) \in H$ äquivalent ist.
Wir setzen deshalb mit einem hinreichend klein gewählten ϵ:

$$M_\xi = M \cap U_{\xi,\epsilon}, \qquad U_\xi = H \cap \sigma(U_{\xi,\epsilon}), \qquad \psi_\xi = \sigma|_{M_\xi}$$

und erhalten damit eine Homöomorphismus $\psi_\xi : M_\xi \tilde{\to} U_\xi$.

Eine analoge Überlegung (mit teilweise umgedrehten Vorzeichen) vermittelt lokale Karten um die Punkte in $\overline{K_{r_i}(x_i)} \backslash K_{r_i}(x_i)$ für $i \geq 1$.

Wegen der speziellen Gestalt der σ sieht man sehr schnell, dass die Übergangsabbildungen ψ_{ij} alle beliebig oft stetig differenzierbar sind.

Daraus ergibt sich dann die Struktur einer Mannigfaltigkeit mit Rand auf M. $\square$

Aufgabe 20) Lösungsskizze: (a) Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $U_1 \times U_2$ in M eine offene Menge ist, wenn U_1 und U_2 offen sind.

Daraus folgt sofort, dass $M = M_1 \times M_2$ selber offen ist. Weiterhin ist $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$ offen.

Seien jetzt $A, A' \subset M$ offen. Wir wollen zeigen, dass auch $A \cap A'$ offen ist. Sei $x = (x_1, x_2) \in A \cap A'$. Dann gibt es offene Teilmengen $U_1, U_1' \subset M_1$ und $U_2, U_2' \subset M_2$ mit $x \in U_1 \times U_2 \subset A$ und $x \in U_1' \times U_2' \subset A'$. Daraus folgt $x \in (U_1 \cap U_1') \times (U_2 \cap U_2') \subset (A \cap A')$, wobei $U_1 \cap U_1'$ in M_1 und $U_2 \cap U_2'$ in M_2 offen ist. Damit ist gezeigt, dass $A \cap A'$ offen ist.

Sei $(A_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen von M. Sei $x \in \bigcup_{i \in I} A_i = A$ beliebig. Dann gibt es $j \in I$ mit $x \in A_j$. Da A_j offen ist, gibt es offene Mengen $U_1 \subset M_1$ und $U_2 \subset M_2$ mit $x \in U_1 \times U_2 \subset A_j$. Wegen $A_j \subset A$ folgt auch $x \in U_1 \times U_2 \subset A$. Da $x \in A$ beliebig war, ist damit gezeigt, dass die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ offen ist. $\square$

(b) Seien sowohl M_1 als auch M_2 separiert und $x = (x_1, x_2) \neq y = (y_1, y_2)$. Dann gilt zumindest eine der Ungleichungen $x_1 \neq x_2$ bzw. $y_1 \neq y_2$. Aus Symmetriegründen können wir o.B.d.A. $x_1 \neq x_2$ annehmen. Dann gibt es offene Teilmengen $U_1, V_1 \subset M_1$ mit $x_1 \in U_1, y_1 \in V_1$ und $U_1 \cap V_1 = \emptyset$. Dann sind $U = U_1 \times M_2$ und $V = V_1 \times M_2$ offene Teilmengen von M mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U, y \in V$. Daraus folgt, dass M separiert ist.

Seien jetzt sowohl M_1 als auch M_2 kompakt. Dann sind sie auch beide separiert, so dass auch M separiert ist. Um zu zeigen, dass M kompakt ist, müssen wir noch beweisen, dass M überdeckungskompakt ist.

Sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von M. Wir fixieren zunächst ein beliebiges $x_1 \in M_1$. Für alle $x_2 \in M_2$ gibt es dann ein $i = i(x_1, x_2) \in I$ mit $(x_1, x_2) \in U_i$. Das impliziert die Existenz von offenen Mengen $U_{1,x_2} \subset M_1$ und $U_{2,x_2} \subset M_2$ mit $(x_1, x_2) \in U_{1,x_2} \times U_{2,x_2} \subset U_{i(x_1,x_2)}$. Aus $x_2 \in U_{2,x_2}$ folgt $\bigcup_{x_2 \in M_2} U_{2,x_2} = M_2$. Da M_2 überdeckungskompakt ist und da die U_{2,x_2} offen sind, folgt die Existenz einer endlichen Teilmenge $E(x_1) \subset M_2$ mit $\bigcup_{x_2 \in E(x_1)} U_{2,x_2} = M_2$. Sei $U(x_1) = \bigcap_{x_2 \in E(x_1)} U_{1,x_2} \subset M_1$. Als Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist $U(x_1)$ in M_1 offen.
Aus der Definition folgt

$$U(x_1) \times M_2 = \bigcup_{x_2 \in E(x_1)} U(x_1) \times U_{2,x_2} \subset \bigcup_{x_2 \in E(x_1)} U_{1,x_2} \times U_{2,x_2} \subset \bigcup_{x_2 \in E(x_1)} U_{i(x_1,x_2)}.$$

D.h. die Menge $U(x_1) \times M_2$ wird von endlich vielen der U_i überdeckt.
Die Überdeckung der Menge M_1 durch die offenen Mengen $U(x_1)$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung, da M_1 überdeckungskompakt ist. Es gibt

also $E \subset M_1$ endlich mit $M_1 = \bigcup_{x_1 \in E} U(x_1)$. Dann folgt

$$M = \bigcup_{x_1 \in E} U(x_1) \times M_2 = \bigcup_{x_1 \in E} \quad \bigcup_{x_2 \in E(x_1)} U_{i(x_1,x_2)} = \bigcup_{x \in F} U_{i(x)}$$

mit der endlichen Indexmenge

$$F = \{(x_1, x_2) | x_1 \in E, x_2 \in E(x_1)\}.$$

Daraus folgt, dass M überdeckungskompakt und damit auch kompakt ist.

Aus dem bisher bewiesenen folgt übrigens sofort: sind M_1 und M_2 lokalkompakt, so ist auch $M_1 \times M_2$ lokalkompakt.

Wir nehmen jetzt an, dass M_1 und M_2 abzählbar im Unendlichen sind. Dann gibt es Folgen kompakter Teilmengen $K_{1i} \subset M_1$ und $K_{2i} \subset M_2$ mit $M_j = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_{ji}$ für $j = 1, 2$. Da die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen wieder kompakt ist, können wir K_{ji} jeweils ersetzen durch $\bigcup_{\nu=1}^{i} K_{j\nu}$ und auf diese Weise erreichen, dass $K_{ji} \subset K_{j,i+1}$ gilt. Dann ist aber

$$M = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_{1i} \times K_{2i}$$

eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen $K_{1i} \times K_{2i}$. Damit ist dann auch M abzählbar im Unendlichen. □

Aufgabe 21) Lösungsskizze: Sei $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ die Überdeckung von M durch offene Mengen M_i, auf denen die Kartenabbildungen $\psi_i : M_i \to U_i$ definiert sind.

Da M kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt $i_1, \ldots, i_k \in I$ mit $M = \bigcup_{j=1}^{k} M_{i_j}$. Zu dieser Überdeckung gibt es eine Partition der Eins, d.h. es gibt für $j = 1, \ldots, k$ Funktionen $\phi_j \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $A_j = supp(\phi_j) \subset M_{i_j}$, so dass für alle $x \in M$ gilt: $\sum_{j=1}^{k} \phi_j(x) = 1$ sowie $\phi_j(x) \geq 0$ für $j = 1, \ldots, k$.

Dass $\phi_j \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt, bedeutet $\phi_j \circ \psi_i^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$ für alle $i \in I$.

Wir definieren für $j = 1, \ldots, k$ eine Funktion $f_j : M \to \mathbb{R}^n$ durch

$$f_j(x) = \phi_j(x) \cdot \psi_{i_j}(x) \quad \text{für } x \in M_{i_j}$$

sowie $f_j(x) = 0$ für $x \notin M_{i_j}$. Wegen $f_j(x) = 0$ für $x \in M_{i_j} \backslash A_j$ ist f_j stetig: dabei geht ein, dass A_j als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge M selber kompakt ist.

Weiterhin gilt für $i \in I$:

$$f_j \circ \psi_i^{-1}(x) = (\phi_j \circ \psi_i^{-1})(x) \cdot (\psi_{i_j} \circ \psi_i^{-1})(x) \qquad \text{für } x \in U_i \cap \psi_i(M_{i_j})$$
$$f_j \circ \psi_i^{-1}(x) = 0 \qquad \text{für } x \in U_i \backslash \psi_i(A_j).$$

Aus diesen Formeln folgt, dass die Einschränkungen von $f_j \circ \psi_i^{-1}$ auf die offenen Teilmengen $U_i \cap \psi_i(M_{i_j})$ sowie $U_i \backslash \psi_i(A_j)$ von U_i jeweils beliebig oft stetig differenzierbar sind. Da diese beiden offenen Teilmengen die Menge U_i überdecken, folgt $f_j \circ \psi_i^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$.

Wir setzen jetzt $N = (n+1) \cdot k$ und definieren

$$f(x) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_k(x), f_1(x), \ldots, f_k(x)) \in \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R}^N.$$

Diese Abbildung hat jetzt alle verlangten Eigenschaften: Da alle ϕ_j und alle f_j stetig sind, ist f stetig. Da stets $\phi_j \circ \psi_i^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$ und $f_j \circ \psi_i^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$ gilt, ist auch $f \circ \psi_i^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(U_i)$.
Wir zeigen abschließend die Injektivität von f: Sei $f(x) = f(y)$ für $x, y \in M$. Wegen $\sum_{j=1}^k \phi_j(x) = 1$ sowie $\phi_j(x) \geq 0$ für $j = 1, \ldots, k$ gibt es einen Index j mit $\phi_j(x) > 0$. Dann ist auch $\phi_j(y) = \phi_j(x) > 0$. Daraus folgt $x, y \in A_j \subset M_{i_j}$. Aus

$$\phi_j(x) \cdot \psi_{i_j}(x) = f_j(x) = f_j(y) = \phi_j(y) \cdot \psi_{i_j}(y)$$

folgt dann $\psi_{i_j}(x) = \psi_{i_j}(y)$. Weil $\psi_{i_j} : M_{i_j} \to U_{i_j}$ bijektiv ist, folgt daraus sofort $x = y$, was die Injektivität von f beweist. □

Aufgabe 22) Lösungsskizze: (a) Für $j \in \mathbb{N}, j > 0$ bilden wir mit Hilfe der euklidischen Metrik die Mengen

$$K_j = \left\{ x \in U \;\middle|\; d(x,0) \leq j,\ d(x, \mathbb{R}^{n+m} \backslash U) \geq \frac{1}{j} \right\} \qquad \text{und} \qquad L_j = M \cap K_j.$$

Wegen $d(x,0) \leq j$ für $x \in K_j$ ist $K_j \subset \mathbb{R}^{n+m}$ beschränkt. Als Durchschnitt der durch die Bedingungen $d(x,0) \leq j$ sowie $d(x,a) \geq \frac{1}{j}$ für alle $a \in \mathbb{R}^{n+m} \backslash U$ definierten abgeschlossenen Teilmengen ist K_j selber eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n+m}$. Damit ist jedes K_j kompakt. Da $L_j \subset K_j$ als Urbild von 0 unter der stetigen Abbildung f in K_j abgeschlossen ist, ist L_j als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selber kompakt.

Es gilt $U = \bigcup_{j=1}^\infty K_j$, denn für jedes $x \in U$ gibt es $r > 0$, so dass die Kugel vom Radius r um x ganz in U enthalten ist. Wählt man j so groß, dass $d(x,0) + 1 \leq j$ sowie $r > \frac{1}{j}$ gilt, dann gilt $x \in K_j$.

Weiterhin folgt $M = U \cap f^{-1}(0) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(K_j \cap f^{-1}(0)) = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$.
Damit ist gezeigt, dass U und M abzählbar im Unendlichen sind.

(b) Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung ϕ aus dem Satz über implizite Funktionen beliebig oft stetig differenzierbar ist. Die Komponenten der Abbildung ϕ erfüllen die Gleichung:

$$f_j(x_1, \ldots, x_n, \phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Partielles Ableiten nach x_i mit Hilfe der Kettenregel ergibt für $1 \leq i \leq n$:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x, \phi(x)) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_{n+k}}(x, \phi(x)) \cdot \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Die partielle Jacobimatrix

$$D_2 f = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{n+k}}(x, \phi(x)) \right)_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m}$$

ist nach Voraussetzung in Nullpunkt invertierbar, und damit wegen der stetigen partiellen Differenzierbarkeit auch in einer Umgebung des Nullpunktes. Die inverse Matrix $(D_2 f)^{-1}$ kann mit der Cramerschen Regel berechnet werden. Damit kann man die obige Gleichung nach den $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x)$ auflösen. Es ergibt sich, dass sich die $\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(x)$ aus den partiellen Ableitungen von f mittels gebrochen rationaler Funktionen berechnen lassen, die aus einer Komposition der partiellen Ableitungen von f und der Abbildung ϕ entstehen.
Diesen Prozess kann man induktiv fortsetzen, indem man die so erhaltenen Gleichungen weiter partiell ableitet. Dabei werden die r-ten partiellen Ableitungen der ϕ_k durch höhere partielle Ableitungen von f und die ersten partiellen Ableitungen von ϕ ausgedrückt, welche man aber durch nochmaliges Anwenden des ersten Schrittes wieder eliminieren kann.
Durch vollständige Induktion folgt dann, dass alle Komponenten von ϕ beliebig oft stetig partiell differenzierbar sind.

Die Mannigfaltigkeitsstruktur auf M wird nun mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen gewonnen: Für jeden Punkt $x \in M$ konstruieren wir folgendermaßen eine offene Menge $M_x \subset M$ und einen Homöomorphismus $\psi_x : M_x \to U_x \subset \mathbb{R}^n$:

Da die Jacobimatrix von f den Rang m hat, gibt es Indizes $1 \leq i_1, \ldots, i_m \leq n+m$, so dass die $m \times m$ - Matrix $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_k}}(x)\right)_{j,k}$ invertierbar ist. Zur Vereinfachung der Notation nehmen wir an, dass $i_k = n+k$ ist. Dann gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen offene Mengen $U_x \subset \mathbb{R}^n, V_x \subset \mathbb{R}^m$ mit $x \in U_x \times V_x$, so dass

$$M \cap (U_x \times V_x) = \{(\xi, \phi_x(\xi)) | \xi \in U_x\}$$

gilt mit einer (nach obiger Vorüberlegung) beliebig oft stetig differenzierbaren Abbildung ϕ_x. Wir setzen $M_x = M \cap (U_x \times V_x)$. Dann ist ψ_x die Einschränkung der Projektion $\pi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ auf die in M offene Menge M_x, und die Umkehrabbildung ψ_x^{-1} hat als Abbildung der Form $\xi \mapsto (\xi, \phi_x(\xi))$ die Eigenschaft, dass die Komposition $\iota \circ \psi_x^{-1}$ beliebig oft stetig differenzierbar ist.
Die Abbildung ψ_x ist ein Homöomorphismus, da sie nach dem Satz über implizite Funktionen eine Bijektion ist und da sie aus den genannten Gründen in beiden Richtungen stetig ist.
Die Kartenwechselabbildungen sind mit einer geeigneten Projektionsabbildung π' von der Form $\pi' \circ \iota \circ \psi_x^{-1}$ und damit ebenfalls beliebig oft stetig differenzierbar.
Damit haben wir einen Atlas von Karten auf M gefunden, der M zu einer Mannigfaltigkeit ohne Rand macht. $\square$

Aufgabe 23) Lösungsskizze: Wir verschieben zunächst die Menge S^1: Durch die Abbildung $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x+1, y, z)$ wird S^1 auf die Menge

$$\tilde{S}^1 = \tau(S^1) = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + y^2 = 1\} = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 2x\}$$

abgebildet. τ ist offensichtlich ein Diffeomorphismus. Das Bild von M_1 unter τ ist

$$\tilde{M}_1 = \tau(M_1) = \tau(\mathbb{R}^3 \backslash S^1) = \mathbb{R}^3 \backslash \tau(S^1) = \mathbb{R}^3 \backslash \tilde{S}^1.$$

Die Einschränkung von τ liefert einen Diffeomorphismus $\tau : M_1 \to \tilde{M}_1$.
Weiterhin betrachten wir die Abbildung

$$I : \mathbb{R}^3 \backslash \{P\} \to \mathbb{R}^3 \backslash \{P\}, \quad (x,y,z) \mapsto \frac{2 \cdot (x,y,z)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Als Quotient von polynomialen Abbildungen sind alle drei Komponentenfunktionen beliebig oft differenzierbar, und zwar in der offenen Menge $\mathbb{R}^3\backslash\{P\}$. Man rechnet sofort $I \circ I = id$ nach:

$$I(I(x,y,z)) = \frac{2 \cdot \frac{2\cdot(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2}}{4 \cdot \left(\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right)}$$

$$= \frac{4 \cdot (x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2) \cdot 4 \cdot \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}} = (x,y,z).$$

Deshalb ist I ein Diffeomorphismus der offenen Menge $\mathbb{R}^3\backslash\{P\}$ auf sich selbst. Aus der Bijektivität von I folgt

$$I(\tilde{M}_1) = I\left((\mathbb{R}^3\backslash\{P\})\backslash(\tilde{S}^1\backslash\{P\}) \right) = (\mathbb{R}^3\backslash\{P\}) \setminus I(\tilde{S}^1\backslash\{P\}).$$

Es genügt deshalb $I(\tilde{S}^1\backslash\{P\}) = G$ zu zeigen, denn dann ist

$$I(\tilde{M}_1) = (\mathbb{R}^3\backslash\{P\})\backslash G = \mathbb{R}^3\backslash(\{P\} \cup G) = M_2,$$

und die Einschränkung des Diffeomorphismus I liefert damit einen Diffeomorphismus $I : \tilde{M}_1 \to M_2$. Da die Komposition von zwei Diffeomorphismen wieder ein Diffeomorphismus ist, ist M_1 zu M_2 diffeomorph.
Nun gilt für $x^2 + y^2 = 2x$ mit $(x,y) \neq (0,0)$:

$$I(x,y,0) = \frac{2(x,y,0)}{x^2+y^2+0^2} = \frac{(2x,2y,0)}{2x} = \left(1, \frac{y}{x}, 0\right).$$

Daraus folgt $I(\tilde{S}^1\backslash\{P\}) \subset G$. Um die Surjektivität der eingeschränkten Abbildung $I : \tilde{S}^1\backslash\{P\} \to G$ zu zeigen, betrachten wir ein beliebiges $(1,\lambda,0) \in G$ und setzen $x = \frac{2}{1+\lambda^2}$, $y = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$. Dann gilt

$$x^2 + y^2 = \frac{4(1+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2} = 2 \cdot \frac{2}{1+\lambda^2} = 2x \quad \text{sowie } \frac{y}{x} = \lambda.$$

Daraus folgt $(x,y,0) \in \tilde{S}^1\backslash\{P\}$ sowie $I(x,y,0) = (1,\lambda,0) \in G$. Die Behauptung folgt. $\square$