Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 5

Aufgabe 16) Lösungsskizze: (a) 1. Die leere Menge $\emptyset$ ist offen in $\overline{X}$, da $\infty \notin \emptyset$ und da $\emptyset$ offen in X ist.

2. Der ganze Raum $\overline{X}$ ist offen, da $X \backslash \overline{X} = \emptyset$ kompakt ist.

3. Sind U_1 und U_2 offene Mengen in $\overline{X}$, so ist weiterhin zu zeigen, dass $U_1 \cap U_2$ offen in $\overline{X}$ ist.
Gilt $\infty \in U_1$ und $\infty \in U_2$, so sind $K_1 = X \backslash (U_1 \backslash \{\infty\})$ und $K_2 = X \backslash (U_2 \backslash \{\infty\})$ kompakt. Dann ist aber auch die Vereinigung $K_1 \cup K_2$ kompakt. Wegen $X \backslash ((U_1 \cap U_2) \backslash \{\infty\}) = K_1 \cup K_2$ ist dann auch $U_1 \cap U_2$ offen, denn es ist $\infty \in U_1 \cap U_2$.
Jetzt betrachten wir den Fall, dass eine der beiden Mengen U_1 und U_2 das Element ∞ nicht enthält. Sei etwa $\infty \notin U_1$. Gilt auch $\infty \notin U_2$, so sind U_1 und U_2 in X offen. Deshalb ist auch $U_1 \cap U_2$ in X offen und damit auch in $\overline{X}$. Gilt $\infty \in U_2$, so ist $K_2 = X \backslash U_2$ kompakt. Damit ist K_2 in X abgeschlossen, das Komplement $U_2 \backslash \{\infty\}$ also in X offen. Wegen $\infty \notin U_1$ gilt aber $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap (U_2 \backslash \{\infty\})$. Als Durchschnitt zweier in X offener Mengen ist damit $U_1 \cap U_2$ eine in X und damit auch in $\overline{X}$ offene Menge.

4. Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie offener Mengen in $\overline{X}$. Wir müssen abschließend zeigen, dass auch $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ in $\overline{X}$ offen ist.
Enthält keines der U_i das Element ∞, so sind alle U_i in X offen und damit auch ihre Vereinigung U. Diese ist dann aber auch in $\overline{X}$ offen, weil sie das Element ∞ nicht enthält.
Jetzt gelte $\infty \in U_{i_0}$ für ein $i_0 \in I$. Dann gilt $\infty \in U$ und wir müssen zeigen, dass $K = X \backslash U$ kompakt ist. Es gilt:

$$K = X \backslash \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcap_{i \in I} (X \backslash U_i) = K_{i_0} \cap \bigcap_{i \in I, i \neq i_0} A_i$$

mit der kompakten Menge $K_{i_0} = X \backslash U_{i_0}$ und den Mengen $A_i = X \backslash U_i$. Diese sind aber stets in X abgeschlossen: im Fall $\infty \notin U_i$ folgt das daraus, dass Komplemente von in X offenen Mengen in X abgeschlossen sind, im Fall

$\infty \in U_i$ folgt das daraus, dass kompakte Teilmengen stets abgeschlossen sind.
Als Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Mengen ist auch $A = \bigcap_{i \in I, i \neq i_0} A_i$ in X abgeschlossen. Nun ist K als Durchschnitt der kompakten Menge K_{i_0} mit der abgeschlossenen Menge A kompakt: die Separiertheit vererbt sich von der kompakten Menge, die Überdeckungskompaktheit folgt daraus, dass für jede offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{j \in J} V_j$ von K die aus $X \backslash A$ und den V_j bestehende Familie eine offene Überdeckung von K_{i_0} ist. Besitzt die letztgenannte Familie eine endliche Teilüberdeckung, so auch die erste. Damit ist gezeigt, dass K kompakt ist, so dass U in $\overline{X}$ offen ist. $\square$

(b) Wir zeigen zunächst, dass $\overline{X}$ separiert ist. Sei $x_1, x_2 \in \overline{X}$ mit $x_1 \neq x_2$. Gilt $x_1, x_2 \in X$, so gibt es wegen der Separiertheit von X zwei in X offene Mengen U_1 und U_2 mit $x_i \in U_i$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Wegen $\infty \notin U_i$ sind die U_i aber auch in $\overline{X}$ offen.
Ist eines der x_i gleich ∞, so nehmen wir o.B.d.A. $x_2 = \infty$ an. Da X nach Voraussetzung lokalkompakt ist, gibt es eine offene Menge $U_1 \subset X$ mit $x_1 \in U_1$, so dass U_1 in einer kompakten Menge K enthalten ist. Dann ist aber $U_2 = \{\infty\} \cup (X \backslash K)$ eine in $\overline{X}$ offene Menge mit $x_2 = \infty \in U_2$. Da U_1 auch in $\overline{X}$ offen ist, haben wir disjunkte in $\overline{X}$ offene Mengen U_1 und U_2 mit $x_i \in U_i$ gefunden.

Wir zeigen jetzt, dass $\overline{X}$ überdeckungskompakt ist: Sei $\overline{X} = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von $\overline{X}$. Es gibt einen Index i_0 mit $\infty \in U_{i_0}$. Dann ist $K = X \backslash U_{i_0}$ kompakt. Wegen $K \subset \bigcup_{i \in I, i \neq i_0} U_i$ gibt es eine endliche Teilmenge $J \subset I \backslash \{i_0\}$ mit $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Aus $\overline{X} = U_{i_0} \cup K$ folgt dann $\overline{X} = \bigcup_{i \in J \cup \{i_0\}} U_i$ mit der endlichen Indexmenge $J \cup \{i_0\}$. Damit ist gezeigt, dass $\overline{X}$ überdeckungskompakt ist. $\square$

Aufgabe 17) Lösungsskizze: (a) S^n ist mit der vom $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Topologie (genauer gesagt mit der von der euklidischen Metrik auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Topologie) ein separierter topologischer Raum. Da S^n abgeschlossen und beschränkt ist, ist S^n kompakt und damit lokalkompakt und abzählbar im Unendlichen.

Als Komplemente von Punkten sind die Mengen M_1 und M_2 offen in S^n, denn in einem separierten Raum ist das Komplement eines Punktes stets offen.

Die Umkehrabbildung ψ_1 der Abbildung ϕ_1 berechnet sich wie folgt: Sei $P = (y_0, y) \in S^n$ mit $y \in \mathbb{R}^n$. Das bedeutet $y_0^2 + \langle y, y \rangle = 1$. Gilt $\phi_1(x) = P$, so muss gelten

$$\frac{\langle x,x \rangle - 1}{\langle x,x \rangle + 1} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x,x \rangle \cdot y_0 + y_0 = \langle x,x \rangle - 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad \langle x,x \rangle (1 - y_0) = 1 + y_0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x,x \rangle = \frac{1+y_0}{1-y_0}.$$

Weiterhin gilt: $y = \frac{2x}{\langle x,x \rangle + 1}$. Das lässt sich nach x auflösen:

$$x = \frac{y}{2} \cdot (\langle x,x \rangle + 1) = \frac{y}{2} \cdot \left(\frac{1+y_0}{1-y_0} + \frac{1-y_0}{1-y_0} \right) = \frac{y}{1-y_0}.$$

Also gilt $\psi_1(y_0, y) = \frac{y}{1-y_0}$. Diese Abbildung ist auf M_1 definiert und dort stetig.
Gilt $\phi_1(x) = (y_0, y)$, so ist $\phi_2(x) = (-y_0, y)$. Daraus folgt $\psi_2(y_0, y) = \frac{y}{1+y_0}$ für $(y_0, y) \in M_2$.
Nach den Permanenzsätzen sind sowohl $\phi_i : U_i = \mathbb{R}^n \to M_i$ als auch $\psi_i : M_i \to U_i$ stetige Abbildungen. Da ψ_i die inverse Abbildung zu ϕ_i ist, sind beide Abbildungen Homöomorphismen.
Um die Mannigfaltigkeitsstruktur zu verifizieren, müssen wir uns noch überzeugen, dass die Abbildungen $\psi_{12} = \psi_2 \circ \phi_1 : U_{12} \to U_{21}$ und ihre Umkehrung ψ_{21} differenzierbar sind. Es gilt

$$U_{12} = \psi_1(M_1 \cap M_2) = \psi_1(S^n \backslash \{N, S\}) = \mathbb{R}^n \backslash \{\psi_1(S)\} = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Analog ist

$$U_{21} = \mathbb{R}^n \backslash \{\psi_2(N)\} = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}.$$

Ausrechnen ergibt für $x \in U_{12}$:

$$\psi(x) = \psi_{12}(x) = \psi_2 \circ \phi_1(x) = \psi_2 \left(\frac{\langle x,x \rangle - 1}{\langle x,x \rangle + 1}, \frac{2x}{\langle x,x \rangle + 1} \right)$$

$$= \frac{\frac{2x}{\langle x,x \rangle + 1}}{\frac{\langle x,x \rangle - 1}{\langle x,x \rangle + 1} + 1} = \frac{x}{\langle x,x \rangle}.$$

Nach den Permanenzsätzen ist das aber eine auf ihrem Definitionsgebiet $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ beliebig oft stetig differenzierbare Abbildung.

Die inverse Abbildung sieht genauso aus, und ist ebenfalls beliebig oft stetig differenzierbar:

$$\psi(x) = \psi_{21}(x) = \psi_1 \circ \phi_2(x) = \psi_1 \left(\frac{1 - \langle x, x\rangle}{\langle x, x\rangle + 1}, \frac{2x}{\langle x, x\rangle + 1} \right)$$

$$= \frac{\frac{2x}{\langle x,x\rangle+1}}{1 - \frac{1-\langle x,x\rangle}{\langle x,x\rangle+1}} = \frac{x}{\langle x, x\rangle}.$$

(b) Wir haben in (a) bereits gezeigt, dass $U_{12} = U_{21} = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $\psi = \psi_{12} : x \mapsto \frac{x}{\langle x,x\rangle}$ für alle $x \neq 0$ gilt. Das Vorzeichen der Jacobideterminante ist negativ: da U_{12} für $n \geq 2$ wegzusammenhängend ist und da die Jacobideterminante eine auf U_{12} nirgends verschwindende stetige Funktion ist, muss man diese Behauptung nach dem Zwischenwertsatz nur in einem einzigen Punkt testen.
Im Punkt $P = (1, 0, \ldots, 0)$ ist die Jacobimatrix z.B. eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $-1, 1, \ldots, 1$ (die nötige Rechnung wird hier nicht ausgeführt). Im Fall $n = 1$ sieht man sofort, dass das Vorzeichen der Ableitung von $\psi : x \mapsto x^{-1}$ negativ ist.

(c) Es ist $\psi^*\omega_2 = \omega_1$ zu zeigen.
Es ist

$$\psi^*\omega_2 = -\frac{d\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \wedge d\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}}{\left(1 + \left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)^2\right)^2}$$

$$= -\frac{\frac{(x_2^2-x_1^2)dx_1 - 2x_1x_2dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \wedge \frac{(-x_2^2+x_1^2)dx_2 - 2x_1x_2dx_1}{(x_1^2+x_2^2)^2}}{\frac{((x_1^2+x_2^2)^2+x_1^2+x_2^2)^2}{(x_1^2+x_2^2)^4}}$$

$$= \frac{((x_2^2 - x_1^2)dx_1 - 2x_1x_2dx_2) \wedge ((x_2^2 - x_1^2)dx_2 + 2x_1x_2dx_1)}{((x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2 + x_2^2)^2}$$

$$= \frac{((x_2^2 - x_1^2)^2 + 4x_1^2x_2^2) \cdot dx_1 \wedge dx_2}{((x_1^2 + x_2^2 + 1) \cdot (x_1^2 + x_2^2))^2}$$

$$= \frac{(x_2^2+x_1^2)^2 \cdot dx_1 \wedge dx_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2 \cdot (x_1^2+x_2^2)^2} = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} = \omega_1. \quad \square$$

Aufgabe 18) Lösungsskizze: (a) Mit der Abkürzung $dz = dx + i \cdot dy$ ist eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn die Differentialform $f(z) \cdot dz$ geschlossen ist. Wegen $d(dz) = ddx + iddy = 0$ ist das äquivalent dazu, dass $d(f \cdot dz) = df \wedge dz$ die Nullform ist. Seien jetzt f und g holomorphe Funktionen auf U.
Es gilt dann

$$d(f+g) \wedge dz = (df + dg) \wedge dz = df \wedge dz + dg \wedge dz = 0 + 0 = 0,$$

d.h. $f + g$ ist holomorph.
Weiterhin ist nach der Produktregel

$$d(f \cdot g) \wedge dz = (f \cdot dg + g \cdot df) \wedge dz = f \cdot dg \wedge dz + g \cdot df \wedge dz = f \cdot 0 + g \cdot 0 = 0.$$

Also ist auch $f \cdot g$ holomorph. Gilt $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, so folgt $d(\frac{1}{g}) = -\frac{1}{g^2} \cdot dg$ und damit $d(\frac{1}{g}) \wedge dz = -\frac{1}{g^2} \cdot dg \wedge dz = 0$, so dass auch $\frac{1}{g}$ eine holomorphe Funktion ist.
Nach der eben bewiesenen Holomorphie eines Produktes ist dann auch $\frac{f}{g}$ eine holomorphe Funktion.

(b) Wir zeigen zunächst, dass die Identität $id : z \mapsto z$ holomorph ist. Es gilt $d(id) = dx + idy = dz$, woraus wegen $dz \wedge dz = 0$ die Holomorphie von id folgt. Mittels vollständiger Induktion und Teil (a) folgt daraus, dass jede Polynomfunktion holomorph ist. Die behauptete Holomorphie von gebrochen rationalen Funktionen folgt daraus mit Hilfe der Quotientenaussage von Teil (a).

(c) Wir zeigen zunächst:

$$I^* dz = -\frac{dw}{w^2}.$$

Sei $w = u + iv$. Dann ist $z = \frac{1}{w} = \frac{u-iv}{u^2+v^2}$. Mit $x = \frac{u}{u^2+v^2}$ und $y = -\frac{v}{u^2+v^2}$ gilt dann

$$I^* dx = d\frac{u}{u^2+v^2} = \ldots = \frac{(v^2-u^2) \cdot du - 2uv \cdot dv}{(u^2+v^2)^2} \qquad \text{und}$$

$$I^* dy = d\frac{-v}{u^2+v^2} = \ldots = \frac{(v^2-u^2) \cdot dv + 2uv \cdot du}{(u^2+v^2)^2}.$$

Daraus folgt:

$$I^*dz = \frac{(v^2 - u^2 + i \cdot 2uv) \cdot du + (-2uv + i \cdot (v^2 - u^2)) \cdot dv}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$= -\frac{(u - iv)^2}{(u^2 + v^2)^2} \cdot (du + i \cdot dv) = -\frac{du + i \cdot dv}{(u + i \cdot v)^2} = -\frac{dw}{w^2}.$$

Weiterhin folgt für alle $w \in \mathbb{C}^*$ sofort aus der Definition von f und g:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = w^{-n} \cdot g(w).$$

Betrachtet man diese Gleichung nur für reelle $w \neq 0$, so handelt es sich um eine Identität zwischen $\mathbb{C}$-wertigen differenzierbaren Funktionen. Ableiten ergibt nach der Produkt- und Ketenregel:

$$(*) \qquad -\frac{1}{w^2} \cdot f'\left(\frac{1}{w}\right) = -n \cdot w^{-n-1} \cdot g(w) + w^{-n} \cdot g'(w).$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit w^{n+1} wird das eine Identität zwischen Polynomfunktionen vom Grad n. Da zwei Polynome vom Grad n übereinstimmen, wenn sie an mehr als n Stellen denselben Wert haben, muss diese Identität für alle $w \in \mathbb{C}^*$ gelten. Gleiches folgt nach Division durch w^{n+1} für die ursprüngliche Identität (*).

Jetzt können wir rechnen:

$$I^*\omega = \frac{I^*f'(z)}{I^*f(z)} \cdot I^*dz = -\frac{f'\left(\frac{1}{w}\right)}{f\left(\frac{1}{w}\right)} \cdot \frac{dw}{w^2} = \frac{-\frac{1}{w^2} \cdot f'\left(\frac{1}{w}\right)}{f\left(\frac{1}{w}\right)} \cdot dw$$

$$= \frac{-n \cdot w^{-n-1} \cdot g(w) + w^{-n} \cdot g'(w)}{w^{-n} \cdot g(w)} \cdot dw = \frac{g'(w)}{g(w)} \cdot dw - n \cdot \frac{dw}{w}. \quad \square$$