Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 4

Aufgabe 13) Lösungsskizze:
(a) Es gelte $d(A, B) > 0$. Dann ist $d(a, b) \geq d(A, B) > 0$ für alle $a \in A, b \in B$, woraus $a \neq b$ für alle $a \in A, b \in B$ folgt. Das bedeutet aber $A \cap B = \emptyset$.

Sei jetzt $d(A, B) = 0$. Wir müssen $A \cap B \neq \emptyset$ zeigen. Wegen

$$\inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) = d(A, B) = 0$$

gibt es Folgen $a_n \in A$ und $b_n \in B$ mit $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = 0$. Weil B kompakt ist, besitzt die Folge (b_n) eine konvergente Teilfolge. O.B.d.A. sei das die Folge b_n selber. Dann gibt es also $b \in B$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Das bedeutet $\lim_{n\to\infty} d(b_n, b) = 0$. Jetzt folgt wegen $0 \leq d(a_n, b) \leq d(a_n, b_n) + d(b_n, b)$ (Dreiecksungleichung), dass auch $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b) = 0$ gilt, was $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ impliziert.
Weil die Menge A in X abgeschlossen ist, folgt daraus $b \in A$. Insgesamt haben wir jetzt $b \in A \cap B$, also $A \cap B \neq \emptyset$. □

(b) Wir bemerken zunächst: Es gilt genau dann $d(x, A) = 0$, wenn $x \in A$ ist: In der Lösung von Aufgabe 35)b) Analysis II wurde gezeigt, dass genau dann $d(x, A) = 0$ ist, wenn $x \in \overline{A}$ gilt. Dass A abgeschlossen ist, bedeutet aber gerade $A = \overline{A}$.
Weiterhin gilt genau dann $d(x, B) = 0$, wenn $x \in B$ ist. Das folgt einerseits daraus, dass jede kompakte Teilmenge $B \subset X$ in X abgeschlossen ist und wir somit in derselben Situation wie bei der Teilmenge A sind: ist b_n eine gegen $x \in X$ konvergente Folge von Elementen $b_n \in B$, so kann man durch Übergang zu einer in B konvergenten Teilfolge erreichen, dass b_n in B einen Grenzwert hat. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes muss dann auch $x \in B$ gelten, woraus die Abgeschlossenheit folgt.
Ein anderer Beweis für die Implikation $d(x, B) = 0 \Rightarrow x \in B$ folgt daraus, dass die stetige Abbildung $b \mapsto d(x, b)$ auf dem Kompaktum B ihr Infimum

$d(x,B)$ annimmt, d.h. es gibt im Fall $d(x,B) = 0$ einen Punkt $b \in B$ mit $d(x,b) = 0$, was $x = b \in B$ bedeutet.

Nach diesen Vorbemerkungen ist klar, dass im Fall $A \cap B = \emptyset$ stets

$$d(x,A) + d(x,B) > 0$$

gilt. Wir wissen aus Ana II Aufgabe 35)a) bereits, dass die Abbildungen $x \mapsto d(x,A)$ und $x \mapsto d(x,B)$ stetig sind. Aus den Permanenzsätzen für stetige Funktionen folgt dann sofort die Stetigkeit der Abbildung f mit

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}.$$

Es gilt $f(x) = 1 \Leftrightarrow d(x,A) = d(x,A) + d(x,B) \Leftrightarrow d(x,B) = 0 \Leftrightarrow x \in B$ sowie $f(x) = 0 \Leftrightarrow d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$. $\square$

Aufgabe 14) Lösungsskizze: (a) Sei $Y = B_1 \cup B_2$ mit nichtleeren offenen Mengen B_1, B_2. Wir müssen zeigen, dass $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ gilt. Die Teilmengen $A_1 = f^{-1}(B_1)$ und $A_2 = f^{-1}(B_2)$ von X sind nicht leer, weil f surjektiv ist, und sie sind offen, weil f stetig ist. Weiterhin gilt $A_1 \cup A_2 = X$ wegen $Y = B_1 \cup B_2$. Weil X zusammenhängend ist, muss deshalb $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ sein, etwa $x \in A_1 \cap A_2$. Es folgt $f(x) \in B_1 \cap B_2$, also $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$. $\square$

(b) Sei X wegzusammenhängend, sowie $X = A_1 \cup A_2$ mit zwei nichtleeren offenen Mengen A_1, A_2. Sei etwa $a_1 \in A_1$ und $a_2 \in A_2$. Weil X wegzusammenhängend ist, gibt es eine stetige Abbildung $\phi : [0,1] \to X$ mit $\phi(0) = a_1$ und $\phi(1) = a_2$. Wegen der Stetigkeit von ϕ sind $I_1 = \phi^{-1}(A_1)$ und $I_2 = \phi^{-1}(A_2)$ offene Teilmengen von $I = [0,1]$. Sie sind nicht leer wegen $0 \in I_1$ und $1 \in I_2$. Weiterhin gilt $I = I_1 \cup I_2$ wegen $X = A_1 \cup A_2$. Da I nach Ana II, Aufgabe 16a) zusammenhängend ist, folgt dass $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ gilt. Dann gilt aber auch $A_1 \cap A_2 \supseteq \phi(I_1) \cap \phi(I_2) \supseteq \phi(I_1 \cap I_2) \neq \emptyset$. Daraus folgt, dass X zusammenhängend ist. $\square$

(c) Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass X wegzusammenhängend ist. Dann müsste es eine stetige Abbildung $f = (f_1, f_2) : I \to X \subset \mathbb{R}^2$ geben mit $f(0) = (0,0)$ und $f(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. Mit f sind auch die Abbildungen $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ stetig.

Sei r das Supremum aller $t \in I$ mit $f_1(t) = 0$. Weil f_1 stetig ist, muss $f_1(r) = 0$ gelten. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es eine Folge $a_n \in (r,1]$

mit $f_1(a_n) = \frac{1}{n\pi}$. Wegen der Kompaktheit von $[r, 1]$ gibt es eine konvergente Teilfolge a_{n_i} von a_n. Sei $a \in [r, 1]$ der Grenzwert. Wegen

$$f_1(a) = f_1(\lim_{i\to\infty} a_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} f_1(a_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{n_i\pi} = 0$$

muss aber $a = r$ gelten, denn für $a > r$ gilt $f_1(a) > 0$. Es ist $f(a_n) \in X$, woraus wegen $f_1(a_n) > 0$ sofort $f_2(a_n) = \sin\left(\frac{1}{f_1(a_n)}\right) = \sin(n\pi) = 0$ folgt. Aus der Stetigkeit von f_2 folgt dann sofort

$$f_2(r) = f_2(\lim_{i\to\infty} a_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} f_2(a_{n_i}) = \lim_{i\to\infty} 0 = 0.$$

Aus dem Zwischenwertsatz folgt aber auch die Existenz einer Folge $b_n \in (r, 1]$ mit $f_1(b_n) = \frac{1}{(2n+\frac{1}{2})\pi}$. Aus denselben Gründen wie eben folgt die Existenz einer Teilfolge mit $\lim_{i\to\infty} b_{n_i} = r$. Nun gilt aber $f_2(b_n) = \sin\left(\frac{1}{f_1(b_n)}\right) = \sin((2n + \frac{1}{2})\pi) = 1$. Aus der Stetigkeit von f_2 folgt dann der Widerspruch $f_2(r) = 1$.
Damit ist gezeigt, dass X nicht wegzusammenhängend ist. $\square$

Aufgabe 15) Lösungsskizze: (a) Nach der Produktregel gilt:

$$d\omega = \frac{du \wedge dv - dv \wedge du}{1 + u^2 + v^2} - \frac{2(udu + vdv) \wedge (u \cdot dv - v \cdot du)}{(1 + u^2 + v^2)^2}$$

$$= \frac{(2(1 + u^2 + v^2) - 2u^2 - 2v^2)du \wedge dv}{(1 + u^2 + v^2)^2} = \frac{2 \cdot du \wedge dv}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

(b) Es ist $i^*\omega = 0$ (das gilt für beide Fassungen des Aufgabentextes).
Weiterhin gilt:

$$j_R^*\omega = \frac{(-R\sin\phi) \cdot d(R\cos\phi) - R\cos\phi \cdot d(-R\sin\phi)}{1 + R^2\sin^2\phi + R^2\cos^2\phi}$$

$$= \frac{R^2 \cdot (\sin^2\phi \cdot d\phi + \cos^2\phi \cdot d\phi)}{1 + R^2} = \frac{R^2}{1 + R^2} d\phi.$$

Daraus folgt

$$I_1 = \int_{-R}^{R} i^*\omega = \int_{-R}^{R} 0 dv = 0 \qquad \text{und}$$

$$I_2 = \int_0^\pi j_R^* \omega = \int_0^\pi \frac{R^2}{1+R^2} d\phi = \pi \cdot \frac{R^2}{1+R^2}.$$

(c) Es ist das Integral

$$I_F = \int_{K_R} \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} dudv$$

zu bestimmen. Wie in Aufgabe 46 aus Analysis 2 wird dieses Integral durch Übergang zu Polarkoordinaten berechnet: $u = r \cdot \cos\phi, v = r \cdot \sin\phi$. Dann gilt (wir lassen hier einige Argumentationsschritte aus!)

$$\begin{aligned} I_F &= \int_0^R \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{2r}{(1 + r^2 \sin^2\phi + r^2\cos^2\phi)^2} d\phi dr \\ &= \pi \cdot \int_0^R \frac{2r}{(1+r^2)^2} dr = \pi \cdot \left. \frac{-1}{1+r^2} \right|_0^R \\ &= \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{1+R^2}\right) = \pi \cdot \frac{R^2}{1+R^2}. \end{aligned}$$

Es ist $I_F - I_1 - I_2 = 0$. Diese Formel kann man als Spezialfall des Satzes von Stokes für kompakte Mannigfaltigkeiten mit Ecken interpretieren: der Rand von K_R ist dort nicht glatt, wo der Halbkreis auf die y-Achse trifft. Diese Version wird in der Vorlesung nicht bewiesen werden. □

(d) Es gilt mit der linken Halbebene $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 0\}$:

$$\int_{K_{R+1}-K_R} d(f \cdot \omega) = \int_{H-K_R} d(f \cdot \omega),$$

denn auf $H - K_{R+1}$ gilt $f = 0$ und damit $f \cdot \omega = 0$ und $d(f \cdot \omega) = 0$. Die Additivität des Integrals liefert:

$$\int_{K_{R+1}-K_R} d(f \cdot \omega) = \int_H d(f \cdot \omega) - \int_{K_R} d(f \cdot \omega).$$

Auf K_R gilt $f = 1$ und damit $d(f \cdot \omega) = d\omega = \eta$ und deshalb

$$\int_{K_R} d(f \cdot \omega) = \int_{K_R} \eta = I_F = \pi \cdot \frac{R^2}{1+R^2}.$$

Nach dem Satz von Stokes ist

$$\int_H d(f \cdot \omega) = \int_{\partial H} f \cdot \omega = \int_{\mathbb{R}} i^*(f \cdot \omega) = \int_{\mathbb{R}} i^* f \cdot i^* \omega = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0.$$

Damit folgt

$$\int_{K_{R+1} - K_R} d(f \cdot \omega) = -\pi \cdot \frac{R^2}{1 + R^2}. \quad \square$$