Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 3

Aufgabe 9) Lösungsskizze: (a) Für $A = (a_{ij}) \in GL(n, \mathbb{R})$ schreiben wir $B = A^{-1} = (b_{ij})$. Nach einer in der linearen Algebra bewiesenen Formel (vgl. Fischer Lemma 4.3.4) gilt

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}) \cdot \det(A)^{-1}.$$

Eine invertierbare Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn $A^{-1} = {}^tA$ gilt, d.h. in unseren Notationen, wenn $B = {}^tA$ ist, oder $b_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt. Das ist aber wegen der zitierten Formel äquivalent zu $a_{ji} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji}) \cdot \det(A)^{-1}$ für alle i, j, was wiederum zu

$$\det(A) \cdot a_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

äquivalent ist. □

(b) Wir formulieren die Aussage etwas allgemeiner im $\mathbb{R}^n$: für $1 \leq j \leq n$ setzen wir $I_j = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{j\}$ sowie

$$\omega_j = (-1)^{j-1} \cdot dx_{I_j} = (-1)^{j-1} \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$$
$$= dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1}.$$

Dann wird durch

$$I\left(\sum_{j=1}^{n} f_j \cdot dx_j\right) = \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot \omega_j$$

ein Isomorphismus $I : A^1(\mathbb{R}^n) \to A^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ definiert.
Wegen der Linearität von I ist die Identität

$$I\left(l^*_{A,1}\omega\right) = \det(A)^{-1} \cdot l^*_{A,n-1}(I(\omega))$$

genau dann für alle $\omega \in A^1(\mathbb{R}^n)$ erfüllt, wenn sie für $\omega = dx_j$ gilt.

Die Abbildung $l_A : (x_i) \mapsto (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j)$ induziert durch Pullback die Abbildung $l^*_{A,1}dx_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}dx_j$. Daraus folgt:

$$I\left(l^*_{A,1}dx_i\right) = \sum_{j=1}^n a_{ij}\omega_j.$$

Die Berechnung der rechten Seite ergibt analog:

$$\det(A)^{-1} \cdot l^*_{A,n-1}(I(dx_i))$$

$$= (-1)^{i-1} \cdot \det(A)^{-1} \cdot l^*_{A,n-1}\left(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n\right)$$

$$= (-1)^{i-1} \cdot \det(A)^{-1} \cdot (\sum_{k=1}^n a_{1k}dx_k) \wedge \ldots \wedge (\sum_{k=1}^n a_{i-1,k}dx_k) \wedge (\sum_{k=1}^n a_{i+1,k}dx_k) \wedge \ldots$$

Schreibt man das als Linearkombination der ω_k aus, so stellt man fest, dass für den Koeffizienten von ω_j nur die Matrixeinträge von A relevant sind, die nicht in der $i$ten Zeile und der j-ten Spalte stehen. Der Koeffizient von $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$ berechnet sich dabei als Determinante der durch Streichen entstandenen Matrix A_{ij}, denn es gilt für $\tilde{A} \in GL(n-1, \mathbb{R})$:

$$l^*_{\tilde{A},n-1}(dx_{\{1,\ldots,n-1\}}) = \det(\tilde{A}) \cdot dx_{\{1,\ldots,n-1\}}.$$

(vgl. das Lemma in Kapitel 74 des LA-Skripts 2003 von Herrn Weissauer) Der Koeffizient von ω_j ist deshalb $(-1)^{j-1} \cdot \det(A_{ij})$, so dass wir insgesamt erhalten

$$\det(A)^{-1} \cdot l^*_{A,n-1}(I(dx_i)) = \det(A)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n (-1)^{i-1+j-1} \cdot \det(A_{ij}) \cdot \omega_j$$

Die Bedingung $I\left(l^*_{A,1}\omega\right) = \det(A)^{-1} \cdot l^*_{A,n-1}(I(\omega))$ ist deshalb äquivalent zu

$$a_{ij} = \det(A)^{-1} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}),$$

was wegen Teil a) zu $A \in O(n, \mathbb{R})$ äquivalent ist. $\square$

Auch in der ursprünglichen Formulierung ist die Behauptung richtig: Ist $A \in O(n, \mathbb{R})$, so folgt aus $A \cdot {}^tA = E$ bekanntlich $1 = \det(E) = \det(A) \cdot$

$\det({}^tA) = \det(A)^2$, also $\det(A)^{-1} = \det(A)$, so dass die Identität sich gar nicht ändert.

Gilt umgekehrt $I\left(l^*_{A,1}\omega\right) = \det(A) \cdot l^*_{A,n-1}(I(\omega))$ für alle $\omega \in A^1(\mathbb{R}^n)$, so folgt daraus mit obigen Überlegungen die Identität

$$a_{ij} = \det(A) \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}),$$

die nach den Überlegungen in Teil a) dann zu

$$A \cdot {}^tA = (\det A)^2 \cdot E$$

äquivalent ist. Berechnet man auf beiden Seiten die Determinante, so erhält man $\det(A)^2 = \det(A)^{2n}$, also $\det(A)^{2n-2} = 1$. Daraus folgt $|\det(A)|^{2n-2} = 1$, was $|\det(A)| = 1$ impliziert. Da $\det(A)$ aber reell ist, muss $\det(A) = \pm 1$ gelten, woraus sofort $\det(A)^2 = 1$ folgt. Dann sind wir aber wieder bei der alten Identität $A \cdot {}^tA = E$, was nichts anderes besagt als $A \in O(n, \mathbb{R})$. $\square$

Aufgabe 10) Lösungsskizze: Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit schreiben wir

$$f(u,v) = \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}\,, \quad \frac{2v}{1+u^2+v^2}\,, \quad \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\right).$$

1. Rechnung: Dann gilt

$$f^*(z \cdot dx \wedge dy) = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}\cdot$$

$$\cdot\frac{2\left(1+u^2+v^2\right)du - 2u\left(2udu+2vdv\right)}{(1+u^2+v^2)^2} \wedge \frac{2\left(1+u^2+v^2\right)dv - 2v\left(2udu+2vdv\right)}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$= \frac{4(u^2+v^2-1)}{(u^2+v^2+1)^5}\cdot\big((1-u^2+v^2)du - 2uvdv\big)\wedge\big((1+u^2-v^2)dv - 2uvdu\big)$$

$$= \frac{4(u^2+v^2-1)}{(u^2+v^2+1)^5} \cdot \left(1^2 - (u^2-v^2)^2 - 4u^2v^2\right) du \wedge dv$$

$$= \frac{4(u^2+v^2-1)}{(u^2+v^2+1)^5} \cdot \left(1^2 - (u^2+v^2)^2\right) du \wedge dv = -\frac{4(u^2+v^2-1)^2}{(u^2+v^2+1)^4} \cdot du \wedge dv.$$

Weiterhin berechnen wir unter Beachtung von

$$\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} = 1 - \frac{2}{u^2+v^2+1}\ :$$

$$f^*(x \cdot dy \wedge dz)$$

$$= \frac{2u}{1+u^2+v^2} \cdot \frac{2\,(1+u^2+v^2)\,dv - 2v\,(2udu+2vdv)}{(1+u^2+v^2)^2} \wedge \frac{2 \cdot (2udu+2vdv)}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$= \frac{2u}{1+u^2+v^2} \cdot \frac{2\,(1+u^2+v^2)\,dv}{(1+u^2+v^2)^2} \wedge \frac{2 \cdot (2udu+2vdv)}{(1+u^2+v^2)^2}$$

$$= \frac{2u}{(1+u^2+v^2)^4} \cdot 2dv \wedge 2 \cdot (2udu) = -\frac{16u^2}{(1+u^2+v^2)^4} du \wedge dv.$$

Ganz analog folgt:

$$f^*(y \cdot dz \wedge dx) = -\frac{16v^2}{(1+u^2+v^2)^4} du \wedge dv.$$

Zusammengefasst ergibt das:

$$f^*(\omega) = -\frac{4du \wedge dv}{(u^2+v^2+1)^4} \cdot \left((u^2+v^2-1)^2 + 4u^2 + 4v^2\right)$$

$$= -\frac{4du \wedge dv}{(u^2+v^2+1)^4} \cdot (u^2+v^2+1)^2 = -4 \cdot \frac{du \wedge dv}{(u^2+v^2+1)^2}. \quad \square$$

2. Rechnung: Wir skizzieren eine leicht modifizierte Rechnung. Dazu führen wir die Funktion

$$g(u,v) = \frac{2}{1+u^2+v^2}$$

ein. Damit schreibt sich die Abbildung f in der Form

$$f(u,v) = (u \cdot g(u,v), v \cdot g(u,v), 1 - g(u,v)), \quad \text{also} \;\; f = (ug, vg, 1-g).$$

Unter Beachtung von $dg \wedge dg = 0$ gilt dann

$$f^*\omega =$$

$$(1-g)\cdot(gdu+udg)\wedge(gdv+vdg)+ug\cdot(gdv+vdg)\wedge(-dg)+vg\cdot(-dg)\wedge(gdu+udg)$$

$$= (1-g)g^2du\wedge dv+(1-g)gvdu\wedge dg+(1-g)gudg\wedge dv-g^2udv\wedge dg-g^2vdg\wedge du$$

$$= (1-g)g^2 \cdot du \wedge dv + gv \cdot du \wedge dg + gu \cdot dg \wedge dv.$$

Ausrechnen ergibt $dg = -g^2 \cdot (udu + vdv)$. Setzt man das unter Beachtung von $du \wedge du = 0 = dv \wedge dv$ ein, so erhält man

$$f^*\omega = (1-g)g^2 du \wedge dv - g^3 v^2 du \wedge dv - g^3 u^2 du \wedge dv$$
$$= g^2 \cdot \big(1 - g \cdot (1 + u^2 + v^2)\big)\, du \wedge dv.$$

Nun gilt $g \cdot (1 + u^2 + v^2) = 2$, so dass sich wie vorher ergibt:

$$f^*\omega = -g^2 du \wedge dv. \quad \square$$

Aufgabe 11) (a) **Lösung:** Die Umkehrabbildung $\psi = \phi^{-1} : V \to U$ ist nach Voraussetzung wieder eine differenzierbare Abbildung, so dass wir auch die Pullbackabbildung $\psi^* : A^r(U) \to A^r(V)$ zur Verfügung haben.

Sei $\omega \in A^r(U)$ mit $d\omega = 0$ und $r \geq 1$. Dann gilt $d(\psi^*(\omega)) = \psi^*(d\omega) = \psi^*(0) = 0$. Da V sternförmig ist, folgt dass $\psi^*(\omega) \in A^r(V)$ exakt ist: es gibt $\eta \in A^{r-1}(V)$ mit $d\eta = \psi^*\omega$. Dann gilt $d(\phi^*\eta) = \phi^*(d\eta) = \phi^*(\psi^*(\omega)) = (\psi \circ \phi)^*\omega = id^*(\omega) = \omega$ mit $\phi^*\eta \in A^{r-1}(V)$. Also ist ω exakt. $\square$

(b) **Lösungsskizze:** Es gilt $f(V) = U$ mit

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < u^2 + v^2 < e^2\} \quad \setminus \quad \{(u,0) | -e^2 < u < -1\}.$$

Die Umkehrabbildung $g : U \to V$ wird gegeben durch

$$g(u,v) = \left(\frac{1}{2} \cdot \log(u^2 + v^2), arg(x,y)\right)$$

wobei $arg(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$ für $x > 0$, $arg(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) - \frac{\pi}{2}$ für $y < 0$ und $arg(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}) + \frac{\pi}{2}$ für $y > 0$ gilt.

Dass $f(V) \subset U$, $g(U) \subset V$ sowie $g \circ f = id_V$ und $f \circ g = id_U$ ist, rechnet man leicht nach. Ebenso überzeugt man sich davon, dass f und g beliebig oft differenzierbar sind. Daraus folgt dann, dass $f : V \to U$ ein Diffeomorphismus ist.

Dass U nicht sternförmig ist, ergibt sich daraus, dass man den Punkt $P_+ = (-1,1) \in U$ nur mit Punkten durch eine Strecke verbinden kann, für die $y > 0$ gilt, während man $P_- = (-1,-1) \in U$ nur mit Punkten verbinden kann, für die $y < 0$ gilt: beides folgt daraus, dass die negative Achse $\{(x,0)|x < 0\}$ ebensowenig in U liegt wie das Intervall $\{(0,y)|y \in [-1,1]\}$.

Da es keinen Punkt in U gibt, den man sowohl mit P_+ als auch mit P_- durch eine ganz in U verlaufende Strecke verbinden kann, kann U nicht sternförmig sein. $\square$

Aufgabe 12) Lösungsskizze: (a) U_1 ist offen als Vereinigung der offenen Teilmengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y < 0\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$.
U_1 ist sternförmig bezüglich des Punktes $P_0 = (0,-1) \in U_1$: Ist $P = (x,y) \in U_1$ beliebig, so gilt entweder $x \neq 0$ oder $x = 0, y < 0$. Ist $t \in (0,1)$ beliebig, so gilt $P_t = t \cdot P + (1-t) \cdot P_0 = (t \cdot x, t \cdot y + (t-1))$. Im ersten Fall gilt $t \cdot x \neq 0$ und damit $P_t \in U_1$. Im zweiten Fall ist $t \cdot y < 0$ und wegen $t < 1$ auch $t - 1 < 0$, woraus $t \cdot y + (t-1) < 0$ und damit $P_t \in U_1$ folgt.
Die Sternförmigkeit von U_2 wird ebenso gezeigt (bezüglich des Punktes $(0,1)$). U_2 ist aus demselben Grund wie U_1 offen.

Wir zeigen, dass $U = U_1 \cup U_2$ nicht sternförmig ist: Wäre U sternförmig bezüglich des Punktes $P_0 = (x_0, y_0)$, so würde $P_t = t \cdot P + (1-t) \cdot P_0 \neq (0,0)$ für alle $t \in (0,1)$ und alle $P \in U$ folgen. Mit $t = \frac{1}{2}$ und $P = (-x_0, -y_0)$ gilt aber $P_t = (0,0)$. Wegen dieses Widerspruchs kann U nicht sternförmig sein. $\square$

(b) Die Abbildung

$$H : Z^1(U) \to \mathbb{R}, \qquad \omega \quad \mapsto \quad f_1(1,0) - f_1(-1,0) - f_2(1,0) + f_2(-1,0)$$

ist wohldefiniert: durch die Bedingung $df_1 = \omega$ ist f_1 bis auf die Addition einer Konstanten eindeutig: jede andere Lösung ist von der Form $\tilde{f}_1 = f_1 + c_1$ mit $c_1 \in \mathbb{R}$. Ebenso ist f_2 bis auf Addition einer Konstanten eindeutig, jede andere Lösung von $df_2 = \omega$ auf U_2 ist von der Form $\tilde{f}_2 = f_2 + c_2$. Bezüglich der alternativen $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ gilt dann

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \tilde{f}_1(1,0) - \tilde{f}_1(-1,0) - \tilde{f}_2(1,0) + \tilde{f}_2(-1,0) \\ &= (f_1(1,0) + c_1) - (f_1(-1,0) + c_1) - (f_2(1,0) + c_2) + (f_2(-1,0) + c_2) \\ &= f_1(1,0) - f_1(-1,0) - f_2(1,0) + f_2(-1,0). \end{aligned}$$

Ebenso leicht folgt die Linearität der Abbildung H: sind $\omega', \tilde{\omega} \in A^1(U)$ mit $d\omega' = 0 = d\tilde{\omega}$ gegeben sowie $a, \tilde{a} \in \mathbb{R}$, so ist mit $\omega = a \cdot \omega' + \tilde{a}\tilde{\omega}$ nachzuweisen, dass $H(\omega) = a \cdot H(\omega') + \tilde{a} \cdot H(\tilde{\omega})$ gilt. Gilt für $i = 1,2$ jeweils $df_i' = \omega'$ und $d\tilde{f}_i = \tilde{\omega}$ auf U_i, so folgt mit $f_i = a \cdot f_i' + \tilde{a} \cdot \tilde{f}_i$ jeweils $df_i = \omega$ auf U_i. Daraus folgt dann leicht die Behauptung:

$$H(\omega) \quad = \quad f_1(1,0) - f_1(-1,0) - f_2(1,0) + f_2(-1,0)$$

$$\begin{aligned}
&= (af_1'(1,0) + \tilde{a}\tilde{f}_1(1,0)) - (af_1'(-1,0) + \tilde{a}\tilde{f}_1(-1,0)) \\
&\qquad -af_2'(1,0) + \tilde{a}\tilde{f}_2(1,0)) + (af_2'(-1,0) + \tilde{a}\tilde{f}_2(-1,0)) \\
&= a \cdot (f_1'(1,0) - f_1'(-1,0) - f_2'(1,0) + f_2'(-1,0)) + \\
&\qquad + \tilde{a} \cdot (\tilde{f}_1(1,0) - \tilde{f}_1(-1,0) - \tilde{f}_2(1,0) + \tilde{f}_2(-1,0)) \\
&\qquad\qquad = a \cdot H(\omega') + \tilde{a} \cdot H(\tilde{\omega}).
\end{aligned}$$

Wir müssen jetzt noch $Kern(H) = \{df | f \in \mathcal{C}^\infty(U)\}$ zeigen: Ist $\omega = df$ mit $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, so kann man $f_1 = f$ auf U_1 und $f_2 = f$ auf U_2 setzen. Dann gilt: $H(\omega) = f(1,0) - f(-1,0) - f(1,0) + f(-1,0) = 0$

Gilt umgekehrt $H(\omega) = 0$, so können wir zunächst durch Addition einer Konstanten zu f_2 erreichen, dass $f_2(1,0) = f_1(1,0)$ ist. Dann ist $0 = H(\omega) = -f_1(-1,0) + f_2(-1,0)$, also $f_1(-1,0) = f_2(-1,0)$.

Auf $U_1 \cap U_2$ gilt $d(f_1 - f_2) = df_1 - df_2 = \omega - \omega = 0$, woraus folgt, dass $g = f_1 - f_2$ lokal konstant ist. Da die beiden Bereiche $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0\}$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$ wegzusammenhängend sind und da g in den beiden Punkten $(-1,0)$ und $(1,0)$ verschwindet, muss g dann insgesamt verschwinden, d.h. f_1 und f_2 stimmen auf $U_1 \cap U_2$ überein, sind also die Einschränkungen einer auf ganz U definierten Funktion f. Dann gilt aber $df = \omega$ auf ganz U. $\square$

(c) Man rechnet leicht nach, dass auf $U_1 \cap U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ mit $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ gilt:

$$df = \frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) dy = \frac{-y}{x^2} \cdot \frac{dx}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{-ydx + xdy}{x^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} \quad = \quad \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad = \quad \omega$$

Wir können dabei noch in den beiden Halbebenen Konstanten zu f dazu addieren, ohne dass sich an $df = \omega$ etwas ändert.

Da f_1 und f_2 bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind, können wir o.B.d.A. setzen $f_1(x,y) = f_2(x,y) = f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ für $x > 0$. Um welche additive Konstante sich f_1 und f_2 für $x < 0$ von f unterscheiden, ergibt sich aber bereits aus der Stetigkeit von f_2 auf der positiven y-Achse bzw. von f_1 auf der negativen y-Achse:

Es ist für festes $y > 0$: $\lim_{x \to 0, x<0} f(x,y) = \lim_{t \to -\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$, aber $\lim_{x \to 0, x>0} f(x,y) = \lim_{t \to +\infty} \arctan(t) = +\frac{\pi}{2}$. Also muss gelten $f_2(x,y) =$

$f(x,y)+\pi$ für $x<0$. Umgekehrt folgt für festes $y<0$: $\lim_{x\to 0, x<0} f(x,y) = \lim_{t\to+\infty} \arctan(t) = +\frac{\pi}{2}$ und $\lim_{x\to 0, x>0} f(x,y) = \lim_{t\to-\infty} \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$, woraus $f_1(x,y) = f(x,y) - \pi$ für $x<0$ folgt.
Daraus ergibt sich insgesamt wegen $\arctan(0) = 0$:

$$H(\omega) = f_1(1,0) - f_1(-1,0) - f_2(1,0) + f_2(-1,0) = 0 - (-\pi) - 0 + \pi = 2\pi.$$