Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 2

Aufgabe 5) Lösungsskizze: Es ist $\omega = dg$ mit $g(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)$. Für jede lineare Abbildung $l : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich des Standardskalarprodukts orthogonal ist, gilt aber $g \circ l = g$. Es folgt

$$l^*\omega = l^*dg = d(l^*g) = d(g \circ l) = dg = \omega. \quad \square$$

Aufgabe 6) Lösungsskizze: Hier hat sich bei der Aufgabenstellung leider eine Inkonsistenz eingeschlichen: Der Vektorraum, in dem sich alles abspielt, sei $\mathcal{T} = \mathbb{R}^m$, wobei $m \geq 1$ fest ist im Gegensatz zur Variable n.
Sei $e_1, e_2, \dots, e_m$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^m$. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach n, dass für beliebige $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$D^n f(x)(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} f(x)$$

und dass $D^n f$ stetig differenzierbar ist. Der Induktionsanfang ist die Tautologie $f(x) = f(x)$. Ist die Formel für ein $n \geq 0$ richtig, so folgt sie für $n + 1$: Wir bemerken zunächst, dass die Auswertung der linearen Abbildung $D(D^n f)$ an einem Basisvektor e_j gerade die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j} D^n f$ ist. Damit folgt zunächst:

$$D^{n+1} f(x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}, e_{i_{n+1}}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{n+1}}} (D^n f)(x) \right) (e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

Wir können die Klammer aber auch anders setzen: Die Auswertungsabbildung:

$$T^n(\mathcal{T}) \to \mathbb{R},$$

die einer multilinaren Abbildung ihren Wert an einem n-Tupel von Vektoren zuordnet, ist eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen, also differenzierbar und stimmt mit ihrer Ableitung in jedem

Punkt überein. Nach der Kettenregel kann man deshalb die Auswertungsabbildung in die partielle Ableitung mit einbeziehen:

$$D^{n+1}f(x)(e_{i_1},\ldots,e_{i_n},e_{i_{n+1}}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{n+1}}}\left((D^n f)(x)(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})\right).$$

Wendet man jetzt die Induktionsvoraussetzung an, so folgt sofort die behauptete Gleichung mit $n+1$ statt n:

$$D^{n+1}f(x)(e_{i_1},\ldots,e_{i_n},e_{i_{n+1}}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{n+1}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}f(x)\right).$$

Da die rechte Seite nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist, folgt damit auch, dass $D^{n+1}f(x)$ stetig differenzierbar ist, da alle Komponenten dieser Abbildung stetig differenzierbar sind.
Damit ist (a) gezeigt.

Die Behauptung in (b) kann man wegen der Multilinearität darauf zurückführen, dass $v_1,\ldots,v_n$ Basisvektoren sind. Wegen der gerade bewiesenen Formel folgt die Behauptung dann sofort daraus, dass die partiellen Ableitungen von f miteinander alle vertauschen, weil f beliebig oft stetig partiell differenzierbar ist.

(c) Da die lineare Abbildung $l : \mathbb{R} \to \mathcal{T},\ t \mapsto t \cdot v_0$ stetig ist, ist I als Urbild der offenen Menge $U \subset \mathcal{T}$ unter dieser Abbildung offen in $\mathbb{R}$. Es gilt: $g = f \circ l$.
Die behauptete Identität lautet mit dieser Notation:

$$g^{(n)}(t) = D^n f(l(t))(v_0,\ldots,v_0)$$

Sie folgt jetzt mittels vollständiger Induktion durch Anwenden der Kettenregel, wobei der Fall $n=0$ gerade die Identität $g(t) = f(l(t))$ ist: Leitet man die für n bewiesene Identität nach t ab, so folgt:

$$g^{(n+1)}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(D^n f(l(t))(v_0,\ldots,v_0)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}D^n f(l(t))\right)(v_0,\ldots,v_0) = D(D^n f)(l(t))(\frac{\partial}{\partial t}l)(v_0,\ldots,v_0)$$

$$= D(D^n f)(l(t))(v_0)(v_0,\ldots,v_0) = D^{n+1}f(l(t)))(v_0,\ldots,v_0,v_0).$$

Das ist gerade die behauptete Identität für $n+1$. $\square$

Aufgabe 7) Lösungsskizze: (a) Ein dx_I ist im Fall $0 \in I$ von der Form $dx_0 \wedge dx_{I\setminus\{0\}} = (-1)^{r-1} dx_{I\setminus\{0\}} \wedge dx_0$
Ein beliebiges $\omega = \sum_{\#I=r} f_I(x) \cdot dx_I$ hat deshalb die Darstellung $\omega = \omega_{r-1} \wedge dx_0 + \omega_r$ mit

$$\omega_{r-1} = (-1)^{r-1} \sum_{\#I=r,\, 0\in I} \omega_I \cdot dx_{I-\{0\}}$$

und

$$\omega_r = \sum_{\#I=r,\, 0\notin I} \omega_I \cdot dx_I.$$

Diese Darstellung ist auch eindeutig, da die Darstellung einer Differentialform als Linearkombination der dx_I mit Koeffizienten aus $\mathcal{C}^\infty(U)$ eindeutig ist. (Details werden hier nicht ausgeführt).

(b) Im Fall $\omega \in A^2(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^4$ haben wir nach (a) eine Darstellung $\omega = \omega_1 \wedge dt + \omega_2$. Es ist $d\omega = (d\omega_1) \wedge dt + d\omega_2$. Mit $\omega_2 = g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 + g_3 dx_1 \wedge dx_2$ gilt dabei

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g_1}{\partial t} dt\right) \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \dots$$

$$= div(g) \cdot dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial t} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial g_2}{\partial t} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial g_3}{\partial t} dx_1 \wedge dx_2\right) \wedge dt.$$

Wird ω_1 durch das Vektorfeld $f = (f_1, f_2, f_3)$ beschrieben, so brauchen wir von der 2 Form $d\omega_1$ nur diejenigen Bestandteile zu berücksichtigen, die eine Ableitung nach x_1, x_2 oder x_3 enthalten: alle Terme der Form $\frac{\partial f_i}{\partial t} dt$ tragen nicht zu $d\omega_1 \wedge dt$ bei. Von den berücksichtungsfähigen Termen wissen wir aus Aufgabe 3), dass sie eine 2 Form bilden, die dem Vektorfeld $rot(f)$ entspricht. Gilt also $d\omega = \eta = \eta_2 \wedge dt + \eta_3$ und korrespondiert η_2 zum Vektorfeld $j = (j_1, j_2, j_3)$ sowie η_3 zur Funktion ρ, so gilt

$$j = rot(f) + \frac{\partial g}{\partial t}, \qquad \rho = div(g).$$

Die Gleichung $d\omega = 0$ übersetzt sich deshalb in das System

$$rot(f) = -\frac{\partial g}{\partial t} \quad \text{und} \quad div(g) = 0.$$

$\square$

Aufgabe 8) Lösungsskizze: Es ist $f^*\omega_1$

$$= f^*\left(\frac{u\cdot dv + v\cdot du}{u^2+v^2}\right) = \frac{e^x\cdot\cos(y)\cdot d(e^x\cdot\sin(y)) + e^x\cdot\sin(y)\cdot d(e^x\cdot\cos(y))}{(e^x\cdot\cos(y))^2 + (e^x\cdot\sin(y))^2}$$

$$= \frac{e^x\cdot(\cos(y)\cdot(e^x\cdot\sin(y)dx + e^x\cdot\cos(y)dy) + \sin(y)\cdot(e^x\cdot\cos(y)dx - e^x\cdot\sin(y)dy))}{e^{2x}\cdot(\cos(y)^2+\sin(y)^2)}$$

$$= \cos(y)\cdot(\sin(y)dx + \cos(y)dy) + \sin(y)\cdot(\cos(y)dx - \sin(y)dy)$$

$$= 2\cos(y)\sin(y)dx + (\cos(y)^2 - \sin(y)^2)dy = \sin(2y)dx + \cos(2y)dy.$$

Analog folgt

$$f^*\omega_2 = \cos(y)\cdot(\sin(y)dx + \cos(y)dy) - \sin(y)\cdot(\cos(y)dx - \sin(y)dy)$$

$$= (\cos(y)^2 + \sin(y)^2)dy = dy.$$

Bemerkung: Bei der Stellung der Aufgabe hat sich ein Tippfehler eingeschlichen. Eigentlich sollte die Differentialform $\tilde{\omega}_1 = \frac{u\cdot du + v\cdot dv}{u^2+v^2}$ statt der Form ω_1 zurückgezogen werden. Die entsprechende Modifikation der Rechnung liefert:

$$f^*\tilde{\omega}_1 = \cos(y)\cdot(\cos(y)dx - \sin(y)dy) + \sin(y)\cdot(\sin(y)dx + \cos(y)dy)$$

$$= (\cos^2(y) + \sin^2(y))dx = dx.$$

Das kann man auch so sehen: Es ist $\tilde{\omega}_1 = dg$ mit $g(u,v) = \frac{1}{2}\log(u^2+v^2)$. Dann folgt $f^*\tilde{\omega}_1 = d(g\circ f) = dx$ wegen $(g\circ f)(x,y) = x$. $\square$