Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Lösungshinweise Blatt 1

Aufgabe 1) Lösungsskizze: Für $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ betrachten wir die Differentialform

$$\omega = g(x,y) \cdot x \cdot dx + g(x,y) \cdot y \cdot dy \ \in \ A^1(\mathbb{R}^2).$$

(a) Wegen $dx \wedge dx = 0 = dy \wedge dy$ müssen wir nur jeweils eine partielle Ableitung der Koeffizientenfunktionen $g \cdot x$ bzw. $g \cdot y$ berechnen:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial}{\partial y}(g(x,y)x) \cdot dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}(g(x,y)y) \cdot dx \wedge dy \\ &= \left(-\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \cdot x + \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} \cdot y \right) \cdot dx \wedge dy. \end{aligned}$$

(b) Es ist $k^*dx = \frac{d}{d\phi}(r \cdot \cos\phi) \cdot d\phi = -r\sin\phi \cdot d\phi$ und analog $k^*dy = r\cos\phi \cdot d\phi$.

$$\begin{aligned} k^*\omega &= g(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r\cos\phi \cdot k^*dx + g(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r\sin\phi \cdot k^*dy \\ &= g(r\cos\phi, r\sin\phi) \cdot r^2 \cdot (-\cos\phi \cdot \sin\phi + \sin\phi \cdot \cos\phi)\, d\phi = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 2) Lösungsskizze: Wir schreiben

$$(*) \qquad \omega = (f_1 + i \cdot f_2) \cdot (dx + i \cdot dy) = (f_1 dx - f_2 dy) + i(f_2 dx + f_1 dy).$$

(a) Die Bedingung $d\omega = 0$ ist nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil äquivalent zu den Bedingungen

$$0 = d(f_1 dx - f_2 dy) = \frac{\partial f_1}{\partial y} dy \wedge dx - \frac{\partial f_2}{\partial x} dx \wedge dy = -\left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \cdot dx \wedge dy$$

und

$$0 = d(f_2 dx + f_1 dy) = \frac{\partial f_2}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial x} dx \wedge dy = \left(-\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \cdot dx \wedge dy.$$

Diese Bedingungen sind äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial x}.$$

Das sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

(b) Sei $g = g_1 + ig_2$ mit reellen differenzierbaren Funktionen $g_1, g_2 : U \to \mathbb{R}$ und $dg = f \cdot (dx + idy)$. Wegen

$$dg = dg_1 + i \cdot dg_2 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}dx + \frac{\partial g_1}{\partial y}dy\right) + i \cdot \left(\frac{\partial g_2}{\partial x}dx + \frac{\partial g_2}{\partial y}dy\right).$$

bedeutet das nach der Formel (*), dass

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = f_1, \qquad \frac{\partial g_1}{\partial y} = -f_2, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial x} = f_2, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial y} = f_1$$

gilt. Daraus folgt aber sofort $\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_2}{\partial y}$ und $\frac{\partial g_1}{\partial y} = -\frac{\partial g_2}{\partial x}$. Also erfüllen der Real- und der Imaginärteil von g die Cauchy-Riemmannschen Differentialgleichungen. Deshalb ist g nach Teil (a) holomorph. $\square$

Aufgabe 3) Lösungsskizze: (a) und (b)

$d\omega_0 = \omega_1$ übersetzt sich in

$$f = (f_1, f_2, f_3) = grad(F) \qquad \text{mit} \qquad grad(F) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}\right)$$

.

$d\omega_1 = \omega_2$ übersetzt sich in

$$g = rot(f) \qquad \text{mit} \qquad rot(f) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

$d\omega_2 = \omega_3$ übersetzt sich in

$$h = div(g) \qquad \text{mit} \qquad div(g) = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}.$$

$dd\omega_0 = 0$ bedeutet $rot(grad(F)) = 0$, $dd\omega_1 = 0$ bedeutet $div(rot(f)) = 0$.
Lemma von Poincaré: Ist g ein Vektorfeld auf einem offenen sternförmigen $U \subset \mathbb{R}^3$ mit $div(g) = 0$, so gibt es ein Vektorfeld f auf U mit $g = rot(f)$.

Ist f ein Vektorfeld auf einem offenen sternförmigen $U \subset \mathbb{R}^3$ mit $rot(f) = 0$, so gibt es eine Funktion F auf U mit $f = grad(F)$. $\square$

Aufgabe 4) Lösungsskizze: (a) Mit $\omega = z \cdot dx \wedge dy + x \cdot dy \wedge dz + y \cdot dz \wedge dx$ gilt

$$d\omega = dz \wedge dx \wedge dy + dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx = 3 \cdot dx \wedge dy \wedge dz.$$

(b) Mit $k(\phi, \psi) = (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi), \cos(\phi) \cdot \sin(\psi), \sin(\phi))$ gilt $k^*\omega =$

$$\sin\phi \cdot (-\sin\phi \cdot \cos\psi \cdot d\phi - \cos\phi \cdot \sin\psi \cdot d\psi) \wedge (-\sin\phi \cdot \sin\psi \cdot d\phi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot d\psi)$$

$$+ \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot (-\sin\phi \cdot \sin\psi \cdot d\phi + \cos\phi \cdot \cos\psi \cdot d\psi) \wedge (\cos\phi d\phi)$$
$$+ \cos\phi \cdot \sin\psi \cdot (\cos\phi d\phi) \wedge (-\sin\phi \cdot \cos\psi \cdot d\phi - \cos\phi \cdot \sin\psi \cdot d\psi)$$
$$= \big(-\sin^2\phi\cos\phi \cdot (\cos^2\psi + \sin^2\psi) - \cos^3\phi\cos^2\psi - \cos^3\phi\sin^2\psi\big) \cdot d\phi \wedge d\psi$$
$$= -\big(\sin^2\phi\cos\phi + \cos^3\phi\big) \cdot (\cos^2\psi + \sin^2\psi) \cdot d\phi \wedge d\psi = -\cos\phi \cdot d\phi \wedge d\psi.$$