Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 12

Aufgabe 45) Lösungsskizze Sei $0 < r < R$ und $0 \leq a \leq r$ sowie

$$(x, y, z) = ((R + a\sin\beta) \cdot \sin\alpha, (R + a\sin\beta) \cdot \cos\alpha, a \cdot \cos\beta)\,.$$

Dann gilt $x^2 + y^2 = (R + a\sin\beta)^2 \cdot (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = (R + a\sin\beta)^2$. Wegen $0 \leq a < R$ folgt $R + a\sin\beta \geq R - a > 0$, so dass wir $\sqrt{x^2 + y^2} = R + a\sin\beta$ erhalten.
Dann ist aber $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = (a\sin\beta)^2 + (a\cos\beta)^2 = a^2 \leq r^2$ und damit $(x, y, z) \in T$.

Gilt umgekehrt $(x, y, z) \in T$, also $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2$, so setzen wir zunächst $a = \sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2}$. Dann ist $0 \leq a \leq r$. Im Fall $a = 0$ gilt $z = 0$ und $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, also $(\frac{x}{R})^2 + (\frac{y}{R})^2 = 1$, woraus nach Aufgabe 2)a) die Existenz eines $\alpha \in [0, 2\pi)$ folgt mit $x = R\sin\alpha, y = R\cos\alpha$. Dann folgt $(x, y, z) = \phi(\alpha, \beta, 0)$ für jedes $\beta \in [0, 2\pi)$.

Im Fall $a > 0$ haben wir $\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-R}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1$, so dass nach Aufgabe 2)a) die (eindeutige) Existenz eines $\beta \in [0, 2\pi)$ folgt mit $\sqrt{x^2 + y^2} - R = a\sin\beta$ und $z = a\cos\beta$. Wie wir schon gesehen haben, gilt $R + a\sin\beta > 0$, so dass wir die äquivalente Gleichung

$$\left(\frac{x}{R + a\sin\beta}\right)^2 + \left(\frac{y}{R + a\sin\beta}\right)^2 = 1$$

erhalten und nach Aufgabe 2)a) wiederum die (eindeutige!) Existenz eines $\alpha \in [0, 2\pi)$ bekommen mit $x = (R + a\sin\beta) \cdot \sin\alpha$ und $y = (R + a\sin\beta) \cdot \cos\alpha$. Damit ist gezeigt, dass T das Bild der Abbildung ϕ ist.

Die Jacobimatrix berechnet sich zu

$$D\phi(a, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \sin\beta\sin\alpha & \sin\beta\cos\alpha & \cos\beta \\ (R + a\sin\beta)\cos\alpha & -(R + a\sin\beta)\sin\alpha & 0 \\ a\cos\beta\sin\alpha & a\cos\beta\cos\alpha & -a\sin\beta \end{pmatrix}.$$

Die Jacobideterminante ist dann:

$$\det(D\phi(a,\alpha,\beta)) = (R + a\sin\beta)\cdot a \cdot \begin{vmatrix} \sin\beta\sin\alpha & \sin\beta\cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \cos\beta\sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}.$$

Die letzte Determinante ist $= 1$, denn die Entwicklung nach der mittleren Zeile liefert

$$-\cos\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\begin{vmatrix} \sin\beta & \cos\beta \\ \cos\beta & -\sin\beta \end{vmatrix} + (-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha\cdot\begin{vmatrix} \sin\beta & \cos\beta \\ \cos\beta & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= (-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot(-\cos^2\beta - \sin^2\beta) = (-1)\cdot(-1) = 1,$$

so dass sich für die Jacobideterminante ergibt:

$$\det(D\phi(a,\alpha,\beta)) = (R + a\sin\beta)\cdot a. \quad \square$$

b) Aus den Überlegungen in Teil a) ist klar, dass die Abbildung ϕ injektiv ist, wenn man sie auf den Bereich $(0,r]\times[0,2\pi)\times[0,2\pi)$ einschränkt.
Da die Substitutionsregel nur für bijektive differenzierbare Abbildungen mit nicht verschwindender Jacobideterminante zwischen offenen Mengen U und V bewiesen wurde, schränken wir weiter ein und setzen:

$$U = (0,r)\times(0,2\pi)\times(0,2\pi) \qquad \text{sowie}$$

$$V = T - T_1 - T_2 - T_3 - T_4,$$

wobei

$$T_1 = \phi(\{0\}\times[0,2\pi)\times[0,2\pi)) = \{(x,y,z)\in T \mid x^2+y^2 = R^2,\ z=0\}$$

$$T_2 = \phi(\{r\}\times[0,2\pi)\times[0,2\pi)) = \{(x,y,z)\in T \mid (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2 + z^2 = r^2\}$$

$$T_3 = \phi([0,r]\times\{0\}\times[0,2\pi)) = \{(x,y,z)\in T | x=0, y>0\}$$

$$T_4 = \phi([0,r]\times[0,2\pi)\times\{0\}) = \{(x,y,z)\in T | x^2+y^2 = R^2, z\geq 0\}$$

Man sieht leicht, dass T_1, T_2, T_3 und T_4 jeweils Nullmengen bezüglich des euklidischen Integrals auf dem $\mathbb{R}^3$ sind.
Weiterhin ist $V = \phi(U)$ nach Konstruktion der T_i und wegen der Injektivität von ϕ im Bereich $a > 0$.

Auf U gilt auch $\det(D\phi(a,\alpha,\beta)) \neq 0$, so dass wir die Substitutionsregel anwenden können:

$$
\begin{aligned}
vol(T) = vol(V) = \int_V 1_V(y)dy &= \int_U 1_U(x)|\det(D\phi(x)|dx \\
&= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R + a\sin\beta)\cdot a \quad d\beta\, d\alpha\, da \\
= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R\cdot a \quad d\beta\, d\alpha\, da \qquad &(\text{wegen } \int_0^{2\pi} \sin\beta d\beta = 0) \\
= R\cdot \int_0^r a da \cdot \int_0^{2\pi} d\beta \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha &= R\cdot \frac{r^2}{2}\cdot (2\pi)^2 = 2\pi^2 R r^2. \quad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 46) Lösungsskizze: (a)
Wir betrachten die Abbildung (modifizierte Polarkoordinaten):

$$\phi : U = (0,\infty)\times(0,2\pi) \;\to\; V = \mathbb{R}^2 - N, \qquad (r,\alpha) \mapsto (\sqrt{r}\cdot\cos\alpha, \sqrt{r}\cdot\sin\alpha)$$

mit der Lebesgue-Nullmenge $N = \{(x,0)|x \geq 0\}$.
ϕ ist stetig partiell differenzierbar mit Jacobimatrix

$$D\phi(r,\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\alpha & \frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\alpha \\ -\sqrt{r}\cdot\sin\alpha & \sqrt{r}\cdot\cos\alpha \end{pmatrix}$$

und der Jacobideterminante $\det(D\phi(r,\alpha)) = \frac{1}{2} \neq 0$. Mit Hilfe von Aufgabe 2)(a) folgt leicht, dass $\phi : U \to V$ bijektiv ist. Da die Jacobideterminante nicht verschwindet, folgt, dass auch die Umkehrabbildung ϕ^{-1} stetig partiell differenzierbar ist und die Jacobideterminante $\frac{1}{2}$ hat.
Ist f auf $[0,\infty)$ und damit auch auf $(0,\infty)$ Lebesgue-integrierbar, so ist auch die Funktion $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}, (r,\alpha) \mapsto f(r)$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt: $\int_U \tilde{f}(x) = 2\pi\cdot\int_0^\infty f(r)dr$.
Weiterhin gilt

$$
\begin{aligned}
F(\phi(r,\alpha)) = F(\sqrt{r}\cos\alpha, \sqrt{r}\sin\alpha) &= f\left((\sqrt{r}\cos\alpha)^2 + (\sqrt{r}\sin\alpha)^2\right) \\
&= f(r) = \tilde{f}(r,\alpha),
\end{aligned}
$$

also $F = \tilde{f}\circ\phi^{-1}$.

Nach dem Satz über die Substitutionsregel 24.5. ist mit $\tilde{f}$ über U auch die Funktion $2 \cdot F = \tilde{f} \circ \phi^{-1} \cdot |\det(D\phi^{-1})|$ über V Lebesgue-integrierbar, und es gilt:

$$\int_V 2 \cdot F(x,y)dxdy = \int_U \tilde{f}(r,\alpha)dr\, d\alpha = 2\pi \cdot \int_0^\infty f(z)dz.$$

Da N eine Nullmenge ist, ist F dann auch auf der Menge $\mathbb{R}^2 = V \cup N$ Lebesgue-integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x,y)dx\, dy \quad = \quad \int_V F(x,y)dx\, dy \quad = \quad \pi \cdot \int_0^\infty f(z)dz. \quad \square$$

(b) Im Fall $f(r) = \exp(-r)$ gilt

$$\int_0^\infty \exp(-r)dr = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \exp(-r)dr = \lim_{n\to\infty} (1 - \exp(-n)) = 1$$

und

$$\begin{aligned}\int_{R^2} F(x,y)dxdy &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2)\exp(-y^2)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx \cdot \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2)dy\end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini. Insgesamt gilt also

$$\pi = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx \right)^2, \qquad \text{woraus} \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi} \quad \text{folgt.} \quad \square$$

Aufgabe 47) Lösungsskizze: Wir wenden die Transformationsformel an mit $U = V = X$ und $\phi : U \to V, x \mapsto g \cdot x$. Dieses ϕ ist Einschränkung der linearen Abbildung: $\Phi : Mat(n,n;\mathbb{R}) \to Mat(n,n;\mathbb{R}), A \mapsto g \cdot A$. Deshalb ist die Ableitung von ϕ in allen Punkten die lineare Abbildung Φ. Schreibt man $Mat(n,n;\mathbb{R})$ als direkte Summe von n mal dem Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ (Spaltenvektoren), indem man jeder Matrix in $Mat(n,n;\mathbb{R})$ ihre Spalten zuordnet, so wird diese direkte Summenzerlegung von der Abbildung Φ respektiert. Auf jedem direkten Summanden ist die Wirkung von Φ einfach die Anwendung der Matrix g auf einen Spaltenvektor. Die Determinante einer solchen linearen Abbildung ist gerade $\det(g)$, so dass die Determinante von Φ dann gerade $(\det(g))^n$ ist.
Deshalb folgt wegen $X = \phi(X)$:

$$I_h(L_g(f)) = \int_X f(gx)|\det(x)|^{-n}dx = \int_X f(gx)|\det(gx)|^{-n} \cdot |\det(g)|^n dx$$

$$= \int_{\phi(X)} f(\phi(x)) \cdot |\det(\phi(x))|^{-n} \cdot |(\det D\phi)|dx = \int_X f(x) \cdot |\det(x)|^{-n}\, dx = I_h(f).$$

Der Beweis für die Behauptung $I_h(R_g(f)) = I_h(f)$ geht vollkommen analog. Man muss lediglich den Matrizen aus $Mat(n, n; \mathbb{R})$ ihre Zeilen zuordnen, wenn man eine Zerlegung von $Mat(n, n; \mathbb{R})$ als direkte Summe von n Kopien des $\mathbb{R}^n$ bekommen will. □

Aufgabe 48) Lösungsskizze: Wir setzen:

$$g_1(x_1, x_2) = \int_{-1}^{x_2} f_2(-1, t)dt + \int_{-1}^{x_1} f_1(t, x_2)dt$$

$$g_2(x_1, x_2) = \int_{-1}^{x_1} f_1(t, -1)dt + \int_{-1}^{x_2} f_2(x_1, t)dt$$

und zwar im Teil (a) für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, während wir im Teil (b) bei g_1 verlangen, dass

$$(x_1, x_2) \in M_1 = \{(x_1, x_2)|x_1 < 0 \text{ oder } x_2 \neq 0\}$$

gilt und bei g_2, dass

$$(x_1, x_2) \in M_2 = \{(x_1, x_2)|x_2 < 0 \text{ oder } x_1 \neq 0\} \qquad \text{ist.}$$

Dann gilt in jedem Fall:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2),$$

denn das erste Integral in der Definition von g_1 hängt gar nicht von x_1 ab, und die Ableitung des zweiten Integrals ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gleich $f_1(x_1, x_2)$.

Ganz analog folgt $\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2)$.

(a) Im Fall (a) berechnen wir jetzt die Differenz mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$g_1(x_1, x_2) - g_2(x_1, x_2) = \int_{-1}^{x_1} (f_1(t, x_2) - f_1(t, -1))dt - \int_{-1}^{x_2} (f_2(x_1, t) - f_2(-1, t))dt$$

$$= \int_{-1}^{x_1} \int_{-1}^{x_2} \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(t, y_2)\, dy_2\, dt - \int_{-1}^{x_2} \int_{-1}^{x_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y_1, t)\, dy_1\, dt$$

Aus dem Satz von Fubini für stetige Funktionen folgt jetzt $g_1(x_1, x_2) - g_2(x_1, x_2) = 0$, wenn wir noch $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ beachten. Wichtig ist hier, dass diese Relation für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Also erfüllt $g = g_1 = g_2$ beide Bedingungen (**). $\square$

(b) Um die Nichtexistenz einer Funktion g mit den Eigenschaften (**) zu zeigen, reicht es aus, die Nichtexistenz unter der zusätzlichen Voraussetzung $g(-1, -1) = 0$ zu zeigen, denn mit g erfüllt auch $g - c$ für jede konstante Funktion c diese Bedingungen, inbesondere für $c = g(-1, -1)$.

Sei also g eine Funktion mit $g(-1, -1) = 0$, die die Differentialgleichungen (**) erfüllt. Wir behaupten $g(x_1, x_2) = g_1(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in M_1$: Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt zunächst:

$$g(-1, x_2) = g(-1, -1) + \int_{-1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x_2}(-1, t) dt = 0 + \int_{-1}^{x_2} f_2(-1, t) dt$$

und dann weiter

$$g(x_1, x_2) = g(-1, x_2) + \int_{-1}^{x_1} \frac{\partial g}{\partial x_1}(t, x_2) dt = g(-1, x_2) + \int_{-1}^{x_1} f_1(t, x_2) dt$$

$$= g_1(x_1, x_2) \qquad \text{für alle } (x_1, x_2) \in M_1.$$

Analog folgt $g(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2)$ für alle $(x_1, x_2) \in M_2$. Demnach müsste $g_1(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) = g_2(x_1, x_2)$ insbesondere für alle $x_1 > 0, x_2 > 0$ gelten. Ausrechnen ergibt aber einerseits

$$g_1(1, 1) = \int_{-1}^{1} \frac{-1}{(-1)^2 + t^2} dt + \int_{-1}^{1} \frac{-1}{t^2 + 1^2} dt = \int_{-1}^{1} \frac{-2}{1 + t^2} dt$$

$$= (-2) \arctan(t)\Big|_{-1}^{1} = -4 \cdot \arctan(1) = -4 \cdot \frac{\pi}{4} = -\pi$$

und andererseits

$$g_2(1, 1) = \int_{-1}^{1} \frac{-(-1)}{t^2 + (-1)^2} dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{1^2 + t^2} dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2}{1 + t^2} dt = 2 \cdot \arctan(t)\Big|_{-1}^{1} = 4 \cdot \arctan(1) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Wegen dieses Widerspruchs ist die Existenz einer Funktion g mit den Eigenschaften (**) für alle $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ widerlegt. $\square$