

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 11

Aufgabe 41) Lösungsskizze Am einfachsten löst man die Aufgabe durch Übergang zu Polarkoordinaten (siehe Aufgabe 46 auf Blatt 12).

Da die Transformationsformel aber zum Zeitpunkt der Abgabe der Lösungen noch nicht bekannt war, wird nun eine alternative Lösung skizziert:

Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ betrachten wir folgende kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$X_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [-n, n], -n \cdot \sqrt{1+y^2} \leq x \leq n \cdot \sqrt{1+y^2}\}.$$

Man kann jetzt stetige Funktionen $\phi_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ konstruieren, deren Träger in X_{n+1} liegt, die auf X_n konstant gleich 1 sind und die auf $X_{n+1} - X_n$ einen Wert im Intervall $[0, 1]$ annehmen (leichte Übung).

Dann ist $\phi_n \cdot f$ eine monoton wachsende Folge von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, die gegen die Funktion f konvergiert. Also ist f Lebesgue-integrierbar, sofern wir gezeigt haben, dass die Folge

$$v_n = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_n(x, y) \cdot f(x, y) dx dy$$

gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert.

Offensichtlich gilt nach Konstruktion der ϕ_n mit

$$w_n = \int_{-n}^n \int_{-n \cdot \sqrt{1+y^2}}^{n \cdot \sqrt{1+y^2}} f(x, y) dx dy$$

die Ungleichung $w_n \leq v_n \leq w_{n+1}$, so dass es reicht, den Grenzwert der w_n zu bestimmen.

Substituiert man im inneren Integral $x = \sqrt{1+y^2} \cdot \tilde{x}$, so erhält man

$$w_n = \int_{-n}^n \int_{-n}^n \frac{4}{(1 + \tilde{x}^2 \cdot (1+y^2) + y^2)^2} \cdot \sqrt{1+y^2} d\tilde{x} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-n}^n \int_{-n}^n \frac{4}{(1+\tilde{x}^2)^2 \cdot (1+y^2)^2} \cdot \sqrt{1+y^2} d\tilde{x} dy \\
&= 4 \cdot \int_{-n}^n \frac{d\tilde{x}}{(1+\tilde{x}^2)^2} \cdot \int_{-n}^n \frac{dy}{(1+y^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Mittels partieller Integration berechnet man schnell, dass

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2} \right)$$

eine Stammfunktion von $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ ist. Daraus folgt dann leicht:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{d\tilde{x}}{(1+\tilde{x}^2)^2} &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctan n - \arctan(-n) + \frac{n}{1+n^2} - \frac{-n}{1+n^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Weiterhin ist $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{(\sqrt{1+y^2})^3}$, so dass wir erhalten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \frac{dy}{(1+y^2)^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{1+n^2}} - \frac{-n}{\sqrt{1+n^2}} \right) = 1 - (-1) = 2.$$

Insgesamt folgt:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 4\pi. \quad \square$$

Aufgabe 42) Lösungsskizze: Wir schreiben

$$\phi(x) = (\phi_0(x)\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$$

mit

$$\phi_0(x) = 1 - \frac{2}{\sum_{k=1}^n x_k^2 + 1}, \quad \phi_i(x) = \frac{2x_i}{\sum_{k=1}^n x_k^2 + 1} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \phi_0(x) = \frac{2 \cdot 2 \cdot x_j}{(\sum_{k=1}^n x_k^2 + 1)^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \phi_i(x) = \frac{2 \cdot \delta_{i,j}}{\sum_{k=1}^n x_k^2 + 1} - \frac{2 \cdot 2 \cdot x_i \cdot x_j}{(\sum_{k=1}^n x_k^2 + 1)^2} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Da die partiellen Ableitungen nach den Permanenzsätzen stetig sind, folgt die totale Differenzierbarkeit. Für die totale Ableitung $D\phi_x(y)$ gilt folgende Formel, die man dadurch verifiziert, dass für $y = e_j$ (j -ter Einheitsvektor) sich die Formeln für die partielle Ableitung ergeben wegen $\langle x, e_j \rangle = x_j$.

$$\begin{aligned} D\phi_x(y) &= \left(\frac{4\langle x, y \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^2}, \frac{2y}{\langle x, x \rangle + 1} - \frac{4x \cdot \langle x, y \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^2} \right) \\ &= \left(\frac{4\langle x, y \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^2}, \frac{2y \cdot (\langle x, x \rangle + 1) - 4x \cdot \langle x, y \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^2} \right). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \phi(x), \phi(x) \rangle &= \left(\frac{\langle x, x \rangle - 1}{\langle x, x \rangle + 1} \right)^2 + \frac{4\langle x, x \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^2} \\ &= \frac{\langle x, x \rangle^2 - 2 \cdot \langle x, x \rangle + 1 + 4 \cdot \langle x, x \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^2} = 1. \end{aligned}$$

Deshalb ist ϕ eine Abbildung in die Einheitssphäre S^n .

(b) Aus (a) folgt

$$\begin{aligned} \langle D\phi_x(y), D\phi_x(z) \rangle &= 16 \cdot \frac{\langle x, y \rangle \cdot \langle x, z \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^4} \\ &+ \frac{2^2(\langle x, x \rangle + 1)^2 \cdot \langle y, z \rangle - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot (\langle x, x \rangle + 1) \cdot \langle x, y \rangle \cdot \langle x, z \rangle + 4^2 \cdot \langle x, x \rangle \cdot \langle x, y \rangle \cdot \langle x, z \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^4} \\ &= 4 \frac{\langle y, z \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^2} + 4 \cdot \frac{\langle x, y \rangle \cdot \langle x, z \rangle \cdot (4 - 4 \cdot (\langle x, x \rangle + 1) + 4 \cdot \langle x, x \rangle)}{(\langle x, x \rangle + 1)^4} \\ &= 4 \frac{\langle y, z \rangle}{(\langle x, x \rangle + 1)^2} = f(x) \cdot \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

mit

$$f(x) = \frac{4}{(\langle x, x \rangle + 1)^2}.$$

Aufgabe 43) Lösungsskizze: (a) Dass $f \mapsto I(f \cdot g)$ eine positive Linearform ist, ist klar. Auch die Daniell-Bedingung ist erfüllt: aus $h_n \nearrow h$ und $f \leq h$

mit $h_n, f \in C_c(X)$ folgt $h_n \cdot g \nearrow h \cdot g$ sowie $fg \leq hg$ und $h_ng, fg \in C_c(X)$. Aus der Daniell-Bedingung für I folgt dann $I_g(f) = I(gf) \leq \sup\{I(h_ng)\} = \sup\{I_g(h_n)\}$.

(b) Da g eine positive stetige Funktion ist, ist die Multiplikation mit g ein Automorphismus von $B(X) = C_c(X)$. Dieser setzt sich auf $B^+(X)$ und auf $B^-(X)$ fort, da die Multiplikation mit einem positiven Skalar Grenzwerte und Monotonie einer Folge erhält.

Bezeichnet O_g bzw. U_g die bezüglich I_g gebildeten Ober- und Unterintegrale, so gilt deshalb:

$$O_g(f) = \sup\{I_g(h) | h \in C_c(X), h \leq f\} =$$

$$\sup\{I(gh) | h \in C_c(X), gh \leq gf\} = \sup\{I(h) | h \in C_c(X), h \leq gf\} = O(gf).$$

Entsprechend folgt $U_g(f) = U(gf)$. Ist f bezüglich I_g Lebesgue-integrierbar, so folgt deshalb, dass das Infimum $I_g^+(f)$ aller $O_g(\tilde{f})$ für $f \leq \tilde{f} \in B^+(X)$ mit dem Supremum $I_g^-(f)$ aller $U_g(\tilde{f})$ für $f \geq \tilde{f} \in B^-(X)$ übereinstimmt. Das Infimum ist aber das Infimum aller $O(\tilde{f}g)$, wobei die Bedingung $f \leq \tilde{f} \in B^+(X)$ zu $fg \leq \tilde{f}g \in B^+(X)$ äquivalent ist. Deshalb ist $I_g^+(f) = I^+(fg)$. Entsprechend folgt $I_g^-(f) = I^-(fg)$. Nun ist f nach Definition genau dann bezüglich I_g integrierbar, wenn $I_g^+(f) = I_g^-(f) \in \mathbb{R}$ gilt, was nach dem eben bewiesenen zu $I^+(gf) = I^-(gf) \in \mathbb{R}$ und damit zur Integrierbarkeit von gf bezüglich I äquivalent ist. Liegt Integrierbarkeit vor, so gilt $I_g(f) = I(gf)$. $\square$

Aufgabe 44) Lösungsskizze: Sei $X_n = [0, 1] \cap \bigcap_{k=0}^n A_k$

Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass $\text{vol}(X_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Behauptung ist wegen $X_0 = [0, 1]$ klar für $n = 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= [0, 1] \cap A_0 \cap \bigcap_{k=1}^{n+1} A_k = [0, 1] \cap \bigcap_{k=1}^{n+1} 3^{-k} A \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left([0, 3] \cap \bigcap_{k=0}^n 3^{-k} A \right). \end{aligned}$$

Nun gilt $[0, 3] \cap A_0 = [0, 1] \cup [2, 3]$ und

$$[2, 3] \cap \bigcap_{k=0}^n 3^{-k} A = 2 + \left([0, 1] \cap \bigcap_{k=0}^n 3^{-k} (A - 2 \cdot 3^k) \right).$$

Offensichtlich ist $A - 2 \cdot 3^k = A$, da $2 \cdot 3^k$ eine gerade natürliche Zahl ist. Daraus folgt $[2, 3] \cap \bigcap_{k=0}^n 3^{-k} A = 2 + X_n$. Insgesamt folgt $X_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (X_n \cup (2 + X_n))$. Daraus folgt

$$\text{vol}(X_{n+1}) = \frac{1}{3} \cdot \text{vol}(X_n) + \frac{1}{3} \cdot \text{vol}(2 + X_n) = \frac{2}{3} \cdot \text{vol}(X_n)$$

woraus die Behauptung sofort mittels Induktion nach n folgt.

Offensichtlich ist die charakteristische Funktion von X der monoton fallende Limes der charakteristischen Funktionen der X_n . Nach dem Satz von Beppo Levi, angewandt auf monoton fallende Funktionslimiten, folgt dann

$$\text{vol}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{vol}(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0. \quad \square$$