

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 6

Aufgabe 37) Lösungsskizze Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ betrachten wir die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{für } \frac{1}{n} \leq x < 1$$
$$f(x) = 0 \quad \text{für } x \notin [\frac{1}{n}, 1)$$

Dann konvergiert die Folge f_n monoton wachsend gegen die Funktion f . Die f_n sind beschränkte Funktionen. Da sie auf den abgeschlossenen Intervallen $[\frac{1}{n}, 1]$ monoton fallend sind, sind sie dort Riemann-Integrierbar und damit auch Lebesgue-integrierbar.

Es gilt

$$\int f_n(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot \sqrt{x} \Big|_{\frac{1}{n}}^1 = 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen die Zahl 2. Der Satz von Beppo Levi impliziert dann die Integrierbarkeit von f , und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} = 2. \quad \square$$

Aufgabe 38) Lösungsskizze: (a) Es ist nach der Produktregel:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx &= \int_a^b \left(\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{2x^2} \right) dx = \int_a^b \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x^2)}{2x} \right) dx \\ &= \frac{\sin(x^2)}{2x} \Big|_a^b = \frac{\sin(b^2)}{2b} - \frac{\sin(a^2)}{2a}. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die erste Behauptung. Wir zeigen jetzt die dritte: Speziell für $a = \sqrt{\pi}$ folgt wegen $\sin(\pi) = 0$:

$$\int_{\sqrt{\pi}}^b f_1(x) dx - \int_{\sqrt{\pi}}^b f_3(x) dx = \frac{\sin(b^2)}{2b}.$$

Die Funktion f_3 hat eine integrierbare Majorante: $|f_3(x)| \leq \frac{1}{2x^2}$ wegen $|\sin(x^2)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Und es ist $\int_{\sqrt{\pi}}^b \frac{1}{2x^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2b} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

Wegen der integrierbaren Majorante konvergiert das Integral $\int_{\sqrt{\pi}}^b f_3(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_3(x) \cdot \chi_{[\sqrt{\pi}, b]}(x) dx$ für $b \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen Wert, der dann das Integral von f_3 darstellt.

Wegen $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{\sin(b^2)}{2b} = 0$ erhalten wir daraus auch die Konvergenz von $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\sqrt{\pi}}^b f_1(x) dx$ gegen denselben Grenzwert.

Damit ist die dritte Behauptung gezeigt.

Für die zweite Behauptung können wir abschätzen, wenn wir $n < \frac{\sqrt{b}}{2\pi}$ wählen:

$$\begin{aligned} \int_0^b f_2(x) dx &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{(2n+1)\pi}} \sin(x^2) dx \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sqrt{(2n+\frac{1}{6})\pi}}^{\sqrt{(2n+\frac{5}{6})\pi}} \sin(x^2) dx \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sqrt{(2n+\frac{1}{6})\pi}}^{\sqrt{(2n+\frac{5}{6})\pi}} \frac{1}{2} dx \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{(2n+\frac{5}{6})\pi} - \sqrt{(2n+\frac{1}{6})\pi} \right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{((2n+\frac{5}{6})\pi - (2n+\frac{1}{6})\pi)}{2 \cdot \left(\sqrt{(2n+\frac{5}{6})\pi} + \sqrt{(2n+\frac{1}{6})\pi} \right)} \\ &\geq \frac{\pi}{3} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\sqrt{(2n+1)\pi}} \end{aligned}$$

Diese Summe divergiert aber, da sie mit dem Integral $\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ verglichen werden kann, welches ebenfalls über alle Grenzen strebt, also divergiert. $\square$

(b) Die Funktion f_3 ist Lebesgue integrierbar, da sie eine integrierbare Majorante besitzt und überall stetig ist. Sie ist deshalb punktweiser Limes einer Folge von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger, wobei die Folgenglieder alle durch die integrierbare Majorante abgeschätzt werden. Nach dem Satz von Lebesgue ist dann auch f_3 integrierbar.

Die nichtnegative Funktion f_2 ist nicht Lebesgue-integrierbar, weil ihr Riemann-Integral $\int_0^b f_2(x)dx$ für $b \rightarrow \infty$ beliebig groß wird.

Da die Lebesgue-integrierbaren Funktionen einen Verband bilden, wäre mit f_1 auch $f_2 = \max(f_1, 0)$ Lebesgue-integrierbar. Da f_2 nicht Lebesgue-integrierbar ist, kann auch f_1 nicht Lebesgue integrierbar sein. $\square$

Aufgabe 39) Lösungsskizze: (a) Die Linearformen auf einem Vektorraum bilden bekanntlich selber einen Vektorraum. Deshalb ist auch

$$I = r_1 \cdot I_1 + \dots + r_k \cdot I_k : \quad f \mapsto r_1 I_1(f) + \dots + r_k I_k(f)$$

eine Linearform auf $C_c(X)$, wenn $I_1, \dots, I_r$ Linearformen sind. Ist $f \geq 0$ eine nichtnegative Funktion und sind $I_1, \dots, I_r$ Integrale, so folgt $I(f) = r_1 I_1(f) + \dots + r_k I_k(f) \geq 0$ wegen $I_j(f) \geq 0$ und $r_j > 0$ für $j = 1, \dots, k$.

Ist $g_n \nearrow g$ eine monoton konvergente Folge und ist $f \leq g$ mit $f, g_n \in C_c(X)$, so gilt $I_j(f) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} I_j(g_n)$ für $j = 1, \dots, k$ und dementsprechend $I(f) \leq \sum_{j=1}^k r_j \cdot s_j$ mit $s_j = \sup_{n \in \mathbb{N}} I_j(g_n)$. Ist eines der Suprema s_j gleich $+\infty$, so sei o.b.d.A. $s_1 = \infty$. Dann gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} I(g_n) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} r_1 I_1(g_n) + \sum_{j=2}^k r_j I_j(g_0) = r_1 \cdot \infty + \sum_{j=2}^k r_j I_j(g_0) = +\infty,$$

woraus unmittelbar $\sup_{n \in \mathbb{N}} I(g_n) \geq I(f)$ folgt.

Sind alle s_j reell, so sei für vorgegebenes $\epsilon > 0$ der Index $n_j \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $I_j(g_n) > I_j(f) - \frac{\epsilon}{k \cdot r_j}$ für $n \geq n_j$ gilt.

Für $n \geq n_0 = \max_{j=1, \dots, k} n_j$ gilt dann:

$$I(g_n) = \sum_{j=1}^k r_j I_j(g_n) > \sum_{j=1}^k r_j \cdot \left(I_j(f) - \frac{\epsilon}{k \cdot r_j} \right) = I(f) - \epsilon.$$

Da es für jedes $\epsilon > 0$ ein entsprechendes n_0 gibt, folgt $\sup_{n \in \mathbb{N}} I(g_n) \geq I(f)$, also genau die Daniell-Bedingung. $\square$

(b) Das ist klar: Die Abbildung $f \mapsto f(r)$ ist offensichtlich linear. Gilt $f \geq 0$, so bedeutet das $f(y) \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$, insbesondere für $y = r$, d.h. es ist dann auch $I_r(f) = f(r) \geq 0$.

Ist $f \leq g$ und $g_n \nearrow g$ mit $f, g_n \in C_c(X)$, so gilt $I(f) = f(r) \leq g(r) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(r) = \sup_{n \in \mathbb{N}} I_r(g_n)$, d.h. die Daniell-Bedingung ist erfüllt.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige reellwertige Funktion. Wir definieren $g_+, g_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ durch $g_+(r) = g_-(r) = f(r)$ und $g_{\pm}(x) = \pm\infty$ für $x \neq r$. Dann ist g_+ ein monoton steigender, g_- ein monoton fallender Limes von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger $g_{n,+}$ bzw. $g_{n,-}$, für die $g_{n,+}(r) = f(r) = g_{n,-}$ für alle hinreichend großen n gilt. Man kann z.B. $g_{n,+} = \min(f(r) + n \cdot |x - r|, \max(n - |x|, 0))$ setzen. Es gilt also $g_+ \in B^+(\mathbb{R})$ mit $O(g_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_r(g_{n,+}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r) = f(r)$ und entsprechend $g_- \in B^-(\mathbb{R})$ mit $U(g_-) = f(r)$. Daraus folgt unmittelbar die Integrierbarkeit von f , wobei dann $I(f) = O(g_+) = U(g_-) = f(r)$ gilt. Und zwar ist diese Beziehung jetzt für beliebige Funktionen richtig. $\square$

Aufgabe 40) Lösungsskizze: (a) Seien $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ unterhalbstetig und sei $x \in X$ beliebig. Dann gibt es für $i = 1, 2$ jeweils $\delta_i > 0$ mit $f_i(y) > f_i(x) - \frac{\epsilon}{2}$ für alle $y \in K_{\delta_i}(x)$. Mit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ folgt dann für alle $y \in K_{\delta}(x)$:

$$(f_1 + f_2)(y) = f_1(y) + f_2(y) > f_1(x) - \frac{\epsilon}{2} + f_2(x) - \frac{\epsilon}{2} = (f_1 + f_2)(x) - \epsilon$$

$$\max(f_1, f_2)(y) = \max(f_1(y), f_2(y)) > \max(f_1(x) - \frac{\epsilon}{2}, f_2(x) - \frac{\epsilon}{2})$$

$$= \max(f_1, f_2)(x) - \frac{\epsilon}{2} > \max(f_1, f_2)(x) - \epsilon$$

$$\min(f_1, f_2)(y) = \min(f_1(y), f_2(y)) > \min(f_1(x) - \frac{\epsilon}{2}, f_2(x) - \frac{\epsilon}{2})$$

$$= \min(f_1, f_2)(x) - \frac{\epsilon}{2} > \min(f_1, f_2)(x) - \epsilon.$$

Es bleibt zu zeigen, dass mit f auch $r \cdot f$ für $r > 0$ zu den unterhalbstetigen Funktionen gehört. Ist $x \in X$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es $\delta > 0$ mit $f(y) > f(x) - \frac{\epsilon}{r}$ für alle $y \in K_{\delta}(x)$. Für diese x gilt aber: $rf(y) > rf(x) - \epsilon$. $\square$

(b) Sei $f_n \nearrow f$ ein monotoner Limes reellwertiger Funktionen. Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $f_n(x) > f(x) - \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Da f_N unterhalbstetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit $f_N(y) > f_N(x) - \frac{\epsilon}{2}$ für alle $y \in K_{\delta}(x)$. Für diese y folgt dann:

$$f(y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(y) \geq f_N(y) > f_N(x) - \frac{\epsilon}{2} > \left(f(x) - \frac{\epsilon}{2}\right) - \frac{\epsilon}{2} = f(x) - \epsilon. \quad \square$$

(c) Stetigkeit bedeutet, dass es für alle $x \in X$ und alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $y \in K_\delta(x)$ gilt:

$$|f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Diese Bedingung ist aber äquivalent zur Bedingung

$$-\epsilon < f(y) - f(x) < \epsilon$$

und diese wiederum zu den beiden Ungleichungen

$$f(y) > f(x) - \epsilon \quad \text{und} \quad f(y) < f(x) + \epsilon.$$

Ist f stetig, so folgt daraus offensichtlich die Unter-Halbstetigkeit von f und $-f$. Sind f und $-f$ unter-halbstetig, so kann man zu x und ϵ jeweils $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ finden, so dass die erste Ungleichung für $y \in K_{\delta_1}(x)$ und die zweite für alle $y \in K_{\delta_2}(x)$ erfüllt ist. Mit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ gelten dann für $y \in K_\delta(x)$ beide Ungleichungen, so dass die Stetigkeit von f damit gezeigt ist. $\square$

(d) Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ unter-halbstetig. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $x \in f^{-1}(a, \infty)$. Das bedeutet: $f(x) > a$. Zu $\epsilon = f(x) - a > 0$ gibt es dann $\delta > 0$, so dass für alle $y \in K_\delta(x)$ gilt: $f(y) > f(x) - \epsilon = f(x) - (f(x) - a) = a$, d.h. $f(y) \in (a, \infty)$ bzw. $y \in f^{-1}(a, \infty)$. Das bedeutet, dass es zu jedem $x \in f^{-1}(a, \infty)$ eine offene Kugel $K_\delta(x)$ gibt, die ganz in $f^{-1}(a, \infty)$ enthalten ist. Damit ist $f^{-1}(a, \infty)$ eine offene Menge.

Ist umgekehrt $f^{-1}(a, \infty)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ eine in X offene Menge und sind $x \in X$ und $\epsilon > 0$ gegeben, so folgt aus der Offenheit von $f^{-1}(a, \infty)$ für $a = f(x) - \epsilon$ die Existenz einer offenen Kugel $K_\delta(x) \subset f^{-1}(a, \infty)$. Das bedeutet aber: $f(y) > a = f(x) - \epsilon$ für alle $y \in K_\delta(x)$. Damit ist gezeigt, dass f unter-halbstetig ist. $\square$