Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 9

Aufgabe 33) Lösungsskizze (a) Partielle Integration liefert wegen $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$ und $\sin(0) = 0 = \cos(\pi/2)$:

$$a_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(x)dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x)) \cdot \cos^n(x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx + \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{d}{dx} \left(\cos^{n+1}(x)\right) dx$$

$$= a_n + \sin(x) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \cos^{n+1}(x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cdot \frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1} dx$$

$$= a_n - \frac{a_{n+2}}{n+1}$$

Daraus folgt dann:

$$\frac{n+2}{n+1} \cdot a_{n+2} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) a_{n+2} = a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot a_n. \quad \square$$

(b) $a_0 = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = x|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$ und

$$a_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx = \sin(x)\Big|_0^{\pi/2} = \sin(\frac{\pi}{2}) - \sin(0) = 1 - 0 = 1.$$

Wir zeigen jetzt die Behauptung

$$(n+1) \cdot a_{n+1} \cdot a_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

mittels vollständiger Indukion.
Für $n = 0$ ist die Gleichung erfüllt wegen $1 \cdot a_1 \cdot a_0 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Ist sie für ein n erfüllt, so folgt nach Teil (a):

$$(n+2) \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+1} = (n+2) \cdot \left(\frac{n+1}{n+2} \cdot a_n \right) \cdot a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n \cdot a_{n+1}$$

Das ist aber nach der Induktionsvoraussetzung $= \frac{\pi}{2}$. $\square$

(c) Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ gilt $1 \geq \cos(x) \geq 0$. Durch Multiplikation mit $\cos^n(x) \geq 0$ folgt $\cos^n(x) \geq \cos^n(x) \cdot \cos(x) \geq 0$, woraus mit der Monotonie des Integrals sofort $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ folgt. Ersetzt man n durch $n+1$, so ergibt sich die behauptete Ungleichung $a_n \geq a_{n+1} \geq a_{n+2} \geq 0$.
Aus Teil (b) folgt $a_n > 0$, so dass sich nach Division durch a_n ergibt:

$$1 = \frac{a_n}{a_n} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Daraus folgt aber wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 1 - 0 = 1$ die Behauptung $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. $\square$

(d) Es gilt $\frac{\pi}{2} = (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot a_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \left((n+1) \cdot a_{n+1}^2\right)$.
Wegen (c) folgt daraus:

$$\lim_{n\to\infty} \left((n+1) \cdot a_{n+1}^2\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ersetzen wir hierin n durch $2n$, so erhalten wir:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} (2n+1) \cdot a_{2n+1}^2.$$

Durch vollständige Induktion zeigen wir jetzt:

$$(2n+1) \cdot a_{2n+1}^2 = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}$$

Aus dieser Behauptung folgt dann unmittelbar die Wallissche Produktdarstellung von $\frac{\pi}{2}$. Für $n = 0$ ist das einfach die Identität, dass $1 \cdot 1^2 = 1$ das leere Produkt ist. Ist die Behauptung für $n - 1 \geq 0$ bewiesen, so folgt für n:

$$(2n+1) \cdot a_{2n+1}^2 = (2n+1) \cdot \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^2 \cdot a_{2n-1}^2$$

$$= \frac{(2n)^2}{(2n+1)\cdot(2n-1)} \cdot (2n-1) \cdot a_{2n-1}^2$$

$$= \frac{4n^2}{4n^2-1} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{4k^2}{4k^2-1} \qquad \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}$$

$$= \prod_{k=0}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}. \quad \square$$

Aufgabe 34) Lösungsskizze: (a) Für jedes beliebige aber feste $x \in \mathbb{R}$ sind Konvergenz und Monotonie der Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ zu prüfen. Für $n \geq x^2$ gilt $1 - \frac{x^2}{n} \geq 0$ und folglich $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$.
Nach 16.7.2 gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \exp(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$, so dass wir mit $y = -x^2$ sofort $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \exp(-x^2)$ erhalten, da es auf die Folgenglieder mit $n < x^2$ nicht ankommt.
Wir müssen noch die Monotonie der Folge zeigen: Es gilt $f_n(x) = 0$ für $n \leq x^2$ und $f_n(x) > 0$ für $n > x^2$. Wir müssen deshalb zeigen, dass aus $m > n > x^2$ folgt:

$$\left(1 - \frac{x^2}{m}\right)^m \geq \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n.$$

Weil beide Seiten positiv sind und Logarithmus und Exponentialfunktion streng monoton sind, ist diese Ungleichung äquivalent zur Ungleichung

$$m \cdot \log\left(1 - \frac{x^2}{m}\right) \geq n \cdot \log\left(1 - \frac{x^2}{n}\right).$$

Die Potenzreihenentwicklung des Logaratithmus

$$\log(1-y) = -\left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \dots\right)$$

konvergiert für alle $y \in (-1,1)$ nach Beispiel 2 in 19.3.2. Für $m > n > x^2$ kann man sie deshalb anwenden und erhält:

$$m \cdot \log\left(1 - \frac{x^2}{m}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} m \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{x^2}{m}\right)^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{-x^{2\nu}}{\nu \cdot m^{\nu-1}}.$$

Aus $m > n$ folgt

$$\frac{-x^{2\nu}}{\nu \cdot m^{\nu-1}} \geq \frac{-x^{2\nu}}{\nu \cdot n^{\nu-1}},$$

woraus sich durch Aufsummieren und Übergang zum Grenzwert der Reihe sofort die behauptete Ungleichung ergibt. $\square$

(b) Es gilt $f_n(x) = 0$ für $|x| > \sqrt{n}$, woraus

$$\int_0^\infty f_n(x)dx \quad = \quad \int_0^{\sqrt{n}} f_n(x)dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx$$

folgt. Die Substitution $x = \sqrt{n} \cdot y$ bringt folgendes:

$$\int_0^\infty f_n(x)dx \quad = \quad \sqrt{n} \cdot \int_0^1 \left(1 - y^2\right)^n dy$$

Substituiert man hierin $y = \sin(z)$, so folgt wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$\int_0^\infty f_n(x)dx \quad = \quad \sqrt{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(z) \cdot \left(1 - \sin^2(z)\right)^n dz$$

$$= \quad \sqrt{n} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(z)^{2n+1} dz \quad = \quad \sqrt{n} \cdot a_{2n+1}. \quad \square$$

(c) Nach Aufgabe 33)(b) gilt

$$\int_0^\infty f_n(x)dx \quad = \quad \sqrt{n \cdot a_{2n+1}^2} \quad = \quad \sqrt{(2n+1) \cdot a_{2n+1} \cdot a_{2n} \cdot \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \cdot \frac{n}{2n+1}}$$

$$= \quad \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \cdot \frac{n}{2n+1}}$$

Nach 33)c) gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1$. Weiterhin ist $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, so dass der Grenzwert für $n \to \infty$ unter der Wurzel existiert und $= \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$ ist. Wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel folgt daraus:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx \quad = \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \square$$

Aufgabe 35) Lösungsskizze: (a) Für $x, y \in X$ und $a \in A$ gilt die Dreiecksungleichung $d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$. Betrachtet man auf beiden Seiten das Infimum über alle $a \in A$, so erhält man:

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) \leq \inf_{a\in A} \left(d(x,y) + d(y,a)\right)$$

$$= d(x,y) + \inf_{a\in A} d(a,y) = d(x,y) + d(y,A).$$

Durch Vertauschen der Rollen von x und y erhält man analog $d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A)$. Diese beiden Ungleichungen kann man wie folgt zusammenfassen:

$$-d(x,y) \leq d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y) \qquad \text{bzw.} \quad |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

Da das für alle $x, y \in X$ gilt, ist $d(.,A)$ Lipschitz-stetig und damit stetig. $\Box$

(b) Weil $d(.,A)$ eine stetige Funktion ist, ist nach den Permanenzsätzen auch $x \mapsto 1 - n \cdot d(x,A)$ stetig. Weil die stetigen Funktionen einen Verband bilden, ist dann auch f_n eine stetige Funktion.

Wegen $d(x,A) \geq 0$ ist die Folge $-n \cdot d(x,A)$ monoton fallend, ebenso die Folge $1 - n \cdot d(x,A)$. Diese Monotonie bleibt erhalten, wenn man jeweils die negativen Folgenglieder durch 0 ersetzt. Dadurch erhält man die Folge $f_n(x)$.

Wir behaupten:

$$(*) \qquad d(x,A) = 0 \quad \iff \quad x \in \overline{A}:$$

Gilt $x \in \overline{A}$, so gibt es eine Folge $a_n \in A$ mit $x = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wegen $d(a_n, A) = d(a_n, a_n) = 0$ und der Stetigkeit von $d(.,A)$ folgt dann aber $d(x,A) = \lim_{n\to\infty} d(a_n, A) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.
Gilt umgekehrt $d(x,A) = 0$, so gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit $d(x, a_n) \leq \frac{1}{n+1}$.
Daraus folgt aber sofort $\lim_{n\to\infty} a_n = x$, also $x \in \overline{A}$, womit (*) bewiesen ist.

Für $x \notin \overline{A}$ gilt $d(x,A) > 0$, so dass die Folge $n \cdot d(x,A)$ beliebig groß wird. Es gilt deshalb $f_n(x) = \max\{0, 1 - n \cdot d(x,A)\} = 0$ für alle hinreichend großen n. Daraus ergibt sich $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = \chi_{\overline{A}}(x)$ in diesem Fall.
Gilt $x \in \overline{A}$, so hat man $f_n(x) = \max\{0;\ 1 - n \cdot 0\} = \max\{0;\ 1\} = 1$ für alle n, woraus ebenfalls $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\overline{A}}(x) = 1$ folgt. $\Box$

(c) Sei $Y \subset X$ und $\chi_Y \in B^-(X)$. Sei etwa $f_n \in B(X) = C(X)$ eine monoton fallende Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen die charakteristische Funktion χ_Y von Y konvergiert. Sei $y_m \in Y$ eine Folge, die gegen $x \in X$ konvergiert. Wir müssen $x \in Y$ zeigen:
Aus $f_n \geq \chi_Y$ folgt $f_n(y_m) \geq \chi_Y(y_m) = 1$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Da die Funktionen f_n alle stetig sind, folgt $f_n(x) = f_n(\lim_{m\to\infty} y_m) = \lim_{m\to\infty} f_n(y_m) \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt durch Übergang zum Grenzwert: $\chi_Y(x) =$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \geq 1$. Dann muss aber $\chi_Y(x) = 1$ sein, d.h. es ist $x \in Y$. Damit ist gezeigt, dass Y in X abgeschlossen ist.

Ist umgekehrt $Y \subset X$ abgeschlossen, so gilt $\overline{Y} = Y$. Die in (b) konstruierte monoton fallende Folge stetiger Funktionen f_n konvergiert gegen die charakteristische Funktion χ_Y von Y, die somit in $B^-(X)$ liegt. $\square$

Aufgabe 36) Lösungsskizze: (a) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ ist genau dann kompakt, wenn sie endlich ist:
Endliche Mengen sind trivialerweise überdeckungskompakt.

Ist umgekehrt $A \subset \mathbb{N}$ kompakt, so betrachten wir die Überdeckung von A durch die offenen Mengen U_n für alle $n \in A$, wobei die einelementigen Mengen $U_n = \{n\} = (n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}) \cap \mathbb{N}$ als Durchschnitt eines offenen Intervalls mit $\mathbb{N}$ offen in $\mathbb{N}$ sind. Da diese Überdeckung durch einelementige Mengen eine endliche Teilüberdeckung besitzt, muss A selber endlich sein.

$C_c(X)$ besteht deshalb aus allen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die nur für endlich viele natürliche Zahlen von 0 verschiedene Werte annehmen.

Wir zeigen jetzt, dass $I : f \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ ein Daniel-Integral ist:
Sei $f, g_n \in C_c(\mathbb{N})$ und $f \leq g$, $g_n \nearrow g$. Sei $M \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $f(k) = 0 = g_0(k)$ für alle $k > M$ gilt. Dann folgt $g(k) \geq g_n(k) \geq g_0(k) = 0$ für alle $k > M$. Daraus folgt:
$I(g_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_n(k) \geq \sum_{k=0}^{M} g_n(k)$. Aus $\lim_{n\to\infty} g_n(k) = g(k) \geq f(k)$ folgt andererseits

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{M} g_n(k) \geq \sum_{k=0}^{M} f(k) = I(f),$$

so dass sich insgesamt $\lim_{n\to\infty} I(g_n) \geq I(f)$ ergibt. Das ist genau die Daniell-Eigenschaft. $\square$

(b) Wir zeigen zunächst, dass eine nicht-negative Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ genau dann integrierbar ist, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ konvergiert, was hier ja gleichzeitig absolute Konvergenze bedeutet:

Wenn wir die Funktionenfolge f_n betrachten mit $f_n(k) = f(k)$ für $k \leq n$ und $f_n(k) = 0$ für $k > n$, so gilt: $f_n \in C_c(\mathbb{N})$ und $f_n \nearrow f$. Also ist $f \in B^+(\mathbb{N})$. Damit ist f genau dann integrierbar, wenn die Folge $I(f_n)$ in $\mathbb{R}$ konvergiert. Das bedeutet aber die Konvergenz der Folge $\sum_{k=0}^{n} f(k)$, was nichts anderes ist als die (absolute) Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$. Damit ist die Äquivalenz für nichtnegative Funktionen bewiesen. Weiterhin gilt im Falle der absoluten Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(k) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f).$$

Sei nun $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ beliebig. Mit $f^+ = \max\{f, 0\}$ und $f^- = \min\{f, 0\}$ gilt $f = f^+ + f^-$ und $|f| = f^+ - f^-$. Da die integrierbaren Funktionen einen Verband bilden, folgt aus der Integrierbarkeit von f die von f^+ und von f^- und damit die von $|f|$. Dass aus der Integrierbarkeit von $|f|$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|$ folgt, was nichts anderes bedeutet als die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$, hatten wir schon gezeigt.
Damit ist eine Richtung der behaupteten Äquivalenz gezeigt.

Sei jetzt $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ absolut konvergent. Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |f(k)|$ eine Majorante sowohl für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f^+(k)$ als auch für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-f^-(k))$ ist, konvergieren diese Reihen auch. Aus der eingangs bewiesenen Äquivalenz folgt dann die Integrierbarkeit der nichtnegativen Funktionen f^+ und $-f^-$. Da die integrierbaren Funktionen einen Vektorraum bilden, ist dann auch $f = f^+ - (-f^-)$ integrierbar.
Die andere Richtung der behaupteten Äquivalenz ist damit auch gezeigt.

Die Formel für das Integral folgt mit Hilfe der Linearität aus den entsprechenden Formeln für f^+ und $-f^-$. $\square$