Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 8

Aufgabe 29) Lösungsskizze Da die Betragsfunktion $x \mapsto |x|$ stetig ist und da die stetigen Funktionen einen Verband bilden (Skript 22.4.), ist auch jedes f_n stetig für $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

Die Folge der f_n ist monoton: für $1 \leq m < n$ ist $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$. Wegen $|x| \geq 0$ folgt daraus $1 - \frac{1}{m}|x| \leq 1 - \frac{1}{n}|x|$. Daraus folgt die Behauptung, denn die Abbildung $y \mapsto \max\{0, y\}$ erhält die Ordnungsrelation $\leq$.

Bei festem x konvergiert die Folge $f_n(x)$ gegen 1: Für alle $n > |x|$ gilt: $\frac{1}{n} \cdot |x| < 1$ und deshalb $0 < 1 - \frac{1}{n}|x|$, woraus $f_n(x) = 1 - \frac{1}{n}|x|$ folgt. Aus $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt dann mit den Permanenzsätzen sofort $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n}|x| = 1 - 0 \cdot |x| = 1$.

Die konstante Funktion 1 ist stetig. Wegen $f_n(n) = 0$ gilt aber $\|f_n - 1\| \geq 1$. Daraus folgt, dass die Folge der Funktionen f_n nicht bezüglich der Supremumsnorm $\|.\|$ gegen die Funktion 1 konvergiert. Das bedeutet, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig ist. $\square$

Aufgabe 30) Lösungsskizze: (a) Sei

$$R = \max\left\{1,\ \frac{1}{|a_n|}\left(|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + 2|a_0| + 1\right)\right\}.$$

Dann gilt für $z \in \mathbb{C}\backslash K_R(0)$, also $|z| \geq R$ folgende Abschätzung nach der Dreiecksungleichung:

$$|P(z)| \geq |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - \ldots - |a_1 z| - |a_0|$$

$$= |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - \ldots - |a_1 z| - 2|a_0| - 1 + (|a_0| + 1)$$

$$\geq (|a_n| \cdot |z| - |a_{n-1}| - \ldots - |a_1| - 2|a_0| - 1) \cdot |z|^{n-1} + (|a_0| + 1) \qquad (\text{wegen } |z| \geq 1)$$

$$\geq |a_0| + 1 = |P(0)| + 1 \qquad \text{wegen } |z| \geq R \geq \frac{1}{|a_n|}\left(|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + 2|a_0| + 1\right)$$

(b) Mit dem R aus Teil (a) nimmt die stetige Funktion $|P| : z \mapsto |P(z)|$ auf der abgeschlossenen Kugel $\overline{B} = \overline{K_R(0)} = \{z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z| \leq R\}$ das Infimum in einem Punkt z_0 als Wert an, weil $\overline{B}$ als abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt ist. Also gilt: $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ für alle $z \in \overline{B}$. Wegen $|P(z)| \geq |P(0)| + 1 > |P(z_0)|$ für alle $|z| \geq R$ gilt dabei $|z_0| < R$, und der Wert $|P(z_0)|$ ist das absolute Minimum von $|P|$ auf ganz $\mathbb{C}$. □

(c) Wäre $P(z_0) \neq 0$, so würde für das Polynom $Q(z) = P(z + z_0)$ gelten: $|Q(z)| = |P(z+z_0)| \geq |P(z_0)| = |Q(0)|$ und $Q(0) = P(z_0) \neq 0$. D.h. wenn z_0 keine Nullstelle des Polynoms P wäre, dann würde es ein Polynom Q geben, für das $|Q|$ sein Minimum bei 0 annimmt und für das $Q(0) \neq 0$ gilt. Um die Annahme auf einen Widerspruch zu führen, können wir uns deshalb auf den Fall $z_0 = 0$ beschränken. Sei also o.B.d.A. $z_0 = 0$.

Es gilt also $a_0 = P(0) \neq 0$. Sei $k \geq 1$ die kleinste Zahl ≥ 1 mit $a_k \neq 0$. Nach Aufgabe 2(c) gibt es $w \in \mathbb{C}$ mit $\exp(w) = -\frac{a_0}{a_k} \neq 0$. Sei $\zeta = \exp\left(\frac{w}{k}\right)$. Dann gilt nach der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion $\zeta^k = \exp\left(k \cdot \frac{w}{k}\right) = \exp(w) = -\frac{a_0}{a_k}$. Das bedeutet: $a_k \cdot \zeta^k = -a_0$.

Wir untersuchen jetzt das Verhalten der Funktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : r \mapsto |P(\zeta \cdot r)|$: Es gilt:

$$\begin{aligned} P(\zeta \cdot r) &= a_n \zeta^n r^n + \ldots + a_{k+1} \zeta^{k+1} r^{k+1} + a_k \zeta^k r^k + a_0 \\ &= \left(a_n \zeta^n r^{n-k-1} + \ldots + a_{k+1} \zeta^{k+1}\right) \cdot r^{k+1} + (1 - r^k) a_0. \end{aligned}$$

Sei $M > 0$ größer als das Supremum der auf dem kompakten Intervall $[0, 1]$ definierten stetigen Funktion $r \mapsto |a_n \zeta^n r^{n-k-1} + \ldots + a_{k+1} \zeta^{k+1}|$. Dann erhalten wir für $r \in [0, 1]$ die Abschätzung

$$q(r) = |P(\zeta \cdot r)| \leq M \cdot r^{k+1} + (1 - r^k)|a_0|$$

Für $0 < r < \min\{1, \frac{|a_0|}{2M}\}$ folgt daraus:

$$q(r) \leq r^k \frac{|a_0|}{2} + (1 - r^k)|a_0| = \left(1 - \frac{r^k}{2}\right) |a_0| < |a_0| = |P(0)|.$$

Diese Aussage steht im Widerspruch dazu, dass $|P(0)|$ der minimale Wert von $|P|$ ist.

Wegen dieses Widerspruchs ist die Annahme $P(z_0) \neq 0$ falsch. Es gilt also $P(z_0) = 0$. Damit ist bewiesen, dass jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt. □

Aufgabe 31) Lösungsskizze: (a) Bei der Definition der Treppenfunktionen ist es möglich, dass man zu den Punkten $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ noch endlich viele dazunimmt. Deshalb kann man bei zwei gegebenen Treppenfunktionen f, g immer o.B.d.A. annehmen, dass es eine Unterteilung des Intervalls I gibt, so dass sowohl f als auch g jeweils auf den offenen Intervallen (x_i, x_{i+1}) konstant sind.
Dann sind aber auch $f+g, c \cdot f, \max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ auf den Intervallen (x_i, x_{i+1}) jeweils konstant (hier sei $c \in \mathbb{R}$). Diese 4 Funktionen gehören deshalb auch zu dem Raum der Treppenfunktionen, der somit einen Verband $B_T(I)$ bildet.

(b) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so definieren wir f_n für $n \in \mathbb{N}$ folgendermaßen: Sei $x_i^{(n)} = a + i \cdot \frac{b-a}{2^n}$ für $i = 0, \ldots, 2^n$. Es sei

$$f_n(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}) \quad \text{und} \quad f_n(y) = \inf_{z \in [x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}]} f(z) \ \text{ für } \ y \in (x_i^{(n)}, x_{i+1}^{(n)}).$$

Dann ist f_n eine Treppenfunktion.
Da jede Unterteilung $(x_i^{(n)})$ durch die folgenden Unterteilungen verfeinert wird, ist die Folge $f_n(x)$ für alle $x \in I$ monoton steigend.
Aus der Stetigkeit von f folgt leicht, dass die Folge $f_n(x)$ für jedes x gegen $f(x)$ konvergiert. Deshalb liegt f in $B_T^+(I)$. Der Beweis für $B_T^-(I)$ geht analog.

(c) Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ betrachten wir die endliche Menge

$$X_n = \{x \in I | f(x) > \frac{1}{n}\} \cup \{a, b\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_{m(n)}\},$$

wobei wir die x_i aufgrund ihrer Anordnung numerieren: $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m(n)}$. Wir setzen $f_n(x) = f(x)$ für $x \in X_n$ und $f_n(x) = \frac{1}{n}$ für $x \notin X_n$. Dann ist f_n jeweils eine Treppenfunktion, denn sie ist auf jedem offenen Intervall (x_i, x_{i+1}) konstant gleich $\frac{1}{n}$. Aus der Definition folgt sofort, dass f_n eine punktweise monoton fallende Folge ist. Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$: Im Fall $f(x) > 0$ gilt $f_n(x) = f(x)$ für alle $n > \frac{1}{f(x)}$, und im Fall $f(x) = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = f(x)$.
Daraus folgt, dass $f \in B_T^-(I)$ gilt. □

Aufgabe 32) Lösungsskizze: (a) Ist $A_n = (a_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in Y, so ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(a_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen $|a_n^k - a_m^k| \leq \|A_n - A_m\|$

ebenfalls eine Cauchyfolge. Aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ folgt, dass diese Folge gegen eine Grenzwert $a^k = \lim_{n\to\infty} a_n^k$ konvergiert.
Die Folge a^k ist beschränkt: Aus der Cauchybedingung folgt die Existenz eines n_0 mit $\|A_n - A_m\| \leq 1$ für alle $n, m \geq n_0$. Da A_{n_0} selber eine beschränkte Folge ist, folgt mit $M = \|A_{n_0}\|$:

$$|a_n^k| \leq |a_n^k - a_{n_0}^k| + |a_{n_0}^k| \leq \|A_n - A_{n_0}\| + \|A_{n_0}\| \leq 1 + M,$$

woraus sofort $|a^k| \leq 1 + M$ für alle M folgt, so dass $A = (a^k) \in Y$ gilt mit $\|(a^k)\| \leq 1 + M$.
Um zu zeigen, dass $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ gilt, wählen wir für $\epsilon > 0$ ein n_0 mit $\|A_n - A_m\| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Daraus folgt $|a_n^k - a_m^k| < \epsilon$ für alle $n, m \geq n_0$ und $k \in \mathbb{N}$. Durch Grenzübergang folgt daraus: $|a_n^k - a^k| \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $k \in \mathbb{N}$, was $\|A_n - A\| \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ impliziert.
Da es für jedes $\epsilon > 0$ ein n_0 mit dieser Eigenschaft gibt, folgt $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ in Y.
Damit ist gezeigt, dass jede Cauchyfolge in Y einen Grenzwert hat. Also ist Y ein vollständiger metrischer Raum. □

(b) Sei $C = (c_n) \in B \subset Y$ eine Folge in der abgeschlossenen Kugel vom Radius 1 um 0. Das bedeutet $\|C - 0\| \leq 1$, was zu $|c_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ äquivalent ist.
Die Folge $A = (a_n) \in I$ sei definiert durch: $a_n = -1$ für $c_n < 0$ und $a_n = +1$ für $c_n \geq 0$. Dann gilt $|a_n - c_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|A - C\| \leq 1 < 2$ folgt. Deshalb ist $C \in U_A$ in der offenen Kugel vom Radius 2 um den Punkt A enthalten, d.h. es gilt $C \in U_A \cap B$.
Damit ist gezeigt, dass $(U_A \cap B)_{A\in I}$ eine offene Überdeckung von B ist.

Für $A \neq A' \in I$ gilt $\|A - A'\| = 2$, denn für $A, A' \in I$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt entweder $a_n = -a'_n \in \{\pm 1\}$, woraus $|a_n - a'_n| = 2$ folgt, oder aber $a_n = a'_n$.
Damit ist klar, dass kein $A \in I \subset B$ in einem $U_{A'}$ für $A' \neq A$ enthalten ist. Daraus folgt aber, dass die Überdeckung $(U_A \cap B)_{A\in I}$ keine echte Teilüberdeckung besitzt. □

(c) Wäre Y lokalkompakt, so würde es eine abgeschlossene Kugel $B' = \overline{K_R(0)}$ um 0 geben, welche kompakt ist. Da die Abbildung $\kappa : x \mapsto \frac{1}{R}x$ stetig ist, wäre dann auch die abgeschlossene Kugel B vom Radius 1 um 0 als Bild der kompakten Menge B' unter der stetigen Abbildung κ kompakt. Nach (b) besitzt B aber eine nicht endliche Überdeckung durch offene Mengen, welche keine echte Teilüberdeckung (insbesondere keine endliche) zulässt. D.h. B ist nicht kompakt.

Wegen dieses Widerspruchs kann Y nicht lokalkompakt sein. $\square$

(d) Wir betrachten für $A \in I$ die offene Kugel U'_A vom Radius 1 um A. Wenn Y eine abzählbare Basis (der Topologie) besitzen würde, gäbe es eine Folge y_n, so dass jede offene Menge in Y mindestens ein Folgenglied enthalten würde. Insbesondere enthält jedes U'_A ein solches Folgenglied.
Die y_n sind selber Folgen: $y_n = (y_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Wir definieren jetzt $A = (a_n) \in I$ durch: $a_n = 1$, falls $y_n^n < 0$ ist, und $a_n = -1$, falls $y_n^n \geq 0$ ist. Dann ist $\|y_n - A\| \geq |y_n^n - a_n| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Deshalb liegt in der offenen Kugel U'_A vom Radius 1 um A kein Folgenglied drin.
Aufgrund dieses Widerspruchs muss unsere Annahme, dass Y eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, falsch sein. $\square$