Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 6

Aufgabe 21) Lösungsskizze Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 12xy^2 - 4x = 4x \cdot (x^2 + 3y^2 - 1) \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 12x^2y - 4y = 4y \cdot (3x^2 + y^2 - 1).$$

Die kritischen Punkte der Abbildung f (das sind per definitionem diejenigen Punkte, wo die Ableitung verschwindet, d.h. wo beide partiellen Ableitungen verschwinden) ergeben sich deshalb als Lösungen des Gleichungssystems

$$4x \cdot (x^2 + 3y^2 - 1) = 0 \qquad \text{und} \qquad 4y \cdot (3x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

Dieses Gleichungssystem ist genau dann erfüllt, wenn in jedem Produkt mindestens ein Faktor Null ist. Deshalb ergeben sich die folgenden vier Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} & x = 0, \quad y = 0, \\ x = 0, \quad 3x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = 0, \quad y = \pm 1, \\ x^2 + 3y^2 - 1 = 0, \quad y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \pm 1, \quad y = 0, \\ x^2 + 3y^2 - 1 = 0, \quad 3x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4}, \quad y^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Im letztgenannten Fall erhalten wir die vier Lösungen $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$.

Die Hessematrix errechnet sich leicht zu

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 12y^2 - 4 & 24xy \\ 24xy & 12x^2 + 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich sofort:

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{ist negativ definit.}$$

Der Punkt $(0,0)$ ist deshalb ein lokales Maximum. Es gilt: $f(0,0)=1$.

$$H(f)(0,\pm 1)=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{ist positiv definit.}$$

$$H(f)(\pm 1,0)=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \text{ist ebenfalls positiv definit.}$$

Diese Punkte sind deshalb lokale Minima. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind $=0$.

$$H(f)(\epsilon_1\frac{1}{2},\epsilon_2\frac{1}{2})=\begin{pmatrix} 2 & 6\epsilon \\ 6\epsilon & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \epsilon_1,\epsilon_2\in\{1,-1\} \text{ und } \epsilon=\epsilon_1\epsilon_2$$

ist indefinit, denn die Determinante dieser Matrix ist $4-36=-32$, so dass sich bei einer Diagonalisierung ein positiver und ein negativer Diagonalterm ergeben müssen.
Die Punkte $(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2})$ sind deshalb Sattelpunkte.

Aus der Gleichung $f(x,y)\geq x^4+y^4-2x^2-2y^2+1=(x^2-1)^2+(y^2-1)^2-1$ liest man ab, dass die Funktion für $|x|\geq 2$ oder $|y|\geq 2$ Werte $\geq (4-1)^2-1=8$ annimmt. Daraus folgt, dass $(0,0)$ kein globales Maximum ist, und dass sich ein globales Minimum nur im Quader $[-2,2]\times[-2,2]$ befinden kann. Da dieser Quader aber kompakt ist, nimmt die Funktion in diesem Quader ihr Minimum tatsächlich an, und zwar im Inneren des Quaders, da die Werte am Rand ≥ 8 sind, während im Inneren der Wert 0 angenommen wird. Das globale Minimum ist deshalb auch ein lokales, und da die Funktionswerte an den vier lokalen Minima alle übereinstimmen, sind diese allesamt auch globale Minima. $\square$

Skizze einer Alternativlösung: Mit der linearen Koordinatentransformation $x=\frac{\xi+\eta}{2}, y=\frac{\xi-\eta}{2}$ schreibt sich die Funktion in der Form:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\cdot\left(\xi^4+\eta^4-2\xi^2-2\eta^2+2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left((\xi^2-1)^2+(\eta^2-1)^2\right).$$

Aus dieser Darstellung liest man leicht ab, dass sich für $\xi=\pm 1,\eta=\pm 1$ vier globale Minima ergeben. Weiterhin hat man für $\xi=\eta=0$ ein lokales Maximum, da die Funktion $(x^2-1)^2$ bei 0 ein lokales Maximum hat. Die vier Sattelpunkte werden dadurch charakterisiert, dass ein lokales Maximum in der einen Variablen mit einem globalen Minimum in der anderen Variablen zusammentrifft: $\xi=0,\eta=\pm 1$ bzw. $\xi=\pm 1,\eta=0$. $\square$

Aufgabe 22) Lösungsskizze: Sei $\phi : I \to M$ eine Abbildung mit $\phi(0) = \xi \in M$ und $\phi'(0) = v$. Aus $f(x) = 0$ für alle $x \in M$ folgt, dass $f \circ \phi : I \to \mathbb{R}$ die Nullfunktion ist. Diese hat die Ableitung 0. Nach der Kettenregel gilt dann: $0 = (f \circ \phi)'(0) = Df(\xi) \circ \phi'(0) = Df(\xi)(v)$. Das bedeutet aber $v \in \ker(Df(\xi))$. Damit ist die eine Richtung der Behauptung gezeigt.

Sei jetzt $v \in \ker(Df(\xi))$. Da der Rang von $Df(\xi)$ gleich m ist, gibt es m Indizes $1 \le \iota_1 < \ldots < \iota_m \le n$, so dass die Matrix $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{\iota_j}}\right)_{1 \le i,j \le m}$ invertierbar ist. Nach einer Umnumerierung der Koordinaten können wir annehmen, dass $i_1 = 1, \ldots, i_m = m$ gilt, d.h. dass die Matrix $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le m}$ invertierbar ist.
Sei $B = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{m+j}}\right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n-m}$ sowie $v = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix}$ mit den Spaltenvektoren $v' = {}^t(v_1, \ldots, v_m)$ und $v'' = {}^t(v_{m+1}, \ldots, v_n)$. Die Bedingung $v \in \ker(Df(\xi))$ übersetzt sich dann in die Gleichung $(A|B) \begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix} = 0$ bzw. $Av' + Bv'' = 0$, die wegen der Invertierbarkeit von A umgeformt werden kann in die Gleichung $v' = -A^{-1}Bv''$.
Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^{n-m}$ mit $\xi'' = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_n) \in V$, eine offene Menge $\tilde{U} \subset U$ mit $\xi \in \tilde{U}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi : V \to \mathbb{R}^m$, so dass sich $M \cap \tilde{U}$ in der Form $\{(\psi(y), y) \mid y \in V\}$ darstellen lässt. Die Gleichung $f(\psi(y), y) = 0$ für $y \in V$ impliziert, dass die Ableitung von der Abbildung $\Psi : y \mapsto f(\psi(y), y)$ verschwindet, insbesondere im Punkt $\xi'' \in V$. Es gilt $\xi = (\psi(\xi''), \xi'')$. Die Kettenregel liefert dann $0 = D\Psi(\xi'')(w) = A \circ D\psi(\xi'')w + Bw$ für alle $w \in \mathbb{R}^{n-m}$, woraus $D\psi(\xi'')(w) = -A^{-1}Bw$ folgt.

Sei jetzt $\phi(t) = \begin{pmatrix} \psi(\xi'' + t \cdot v'') \\ \xi'' + t \cdot v'' \end{pmatrix} M$ für alle $t \in I$, wenn I ein hinreichend kleines offenes Intervall mit $0 \in I$ ist. Dann gilt $\phi(t) \in M$ für $t \in I$, und die letzten $n - m$ Koordinaten von ϕ sind so gewählt, dass $\phi'(0)$ mit den letzten Koordinaten von v übereinstimmt. Es gilt aber sogar $\phi(0) = \xi$ und

$$\phi'(0) = \begin{pmatrix} D\psi(\xi'')(v'') \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1}Bv'' \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \end{pmatrix} = v$$

□

Aufgabe 23) Lösungsskizze: In der linearen Algebra lernt man den Satz, dass eine lineare Abildung $\phi : V \to \mathbb{R}$ eines Vektorraums V in den Grundkörper

$\mathbb{R}$ genau dann das Vielfache einer von 0 verschiedenen linearen Abbildung $\psi : V \to \mathbb{R}$ ist, wenn $\ker(\psi) \subset \ker(\phi)$ gilt.

Seien also die Voraussetzungen der Aufgabe erfüllt, und sei $v \in \ker(dg(a))$. Da $dg(a) \neq 0$ ist, hat es als lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ den Maximalrang 1, so dass sich die Aufgabe 22 anwenden lässt. Dann gibt es ein offenes Intervall $0 \in I \subset \mathbb{R}$, eine differenzierbare Abbildung $\phi : I \to M$ mit $\phi(0) = a$ und $\phi'(0) = v$. Da $a = \phi(0)$ ein lokales Extremum für die Abbildung f ist, hat auch die Abbildung $f \circ \phi$ an der Stelle 0 ein lokales Extremum. Es folgt: $0 = d(f \circ \phi)(0) = df(a) \circ \phi'(0) = df(a) \circ v$, also $v \in \ker(df(a))$.

Daraus folgt nach obigen Überlegungen, dass $df(a)$ ein Vielfaches von $dg(a)$ ist. $\square$

Aufgabe 24) Lösungsskizze: Wenn

$$(x, y, z) \in M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 = y^2 + z^2 \leq 1\}$$

gilt, dann folgt aus $x^3 \leq 1$, dass $x \leq 1$ ist. Und aus $x^3 = y^2 + z^2 \geq 0$ folgt, dass auch $x \geq 0$ gilt.

Wir berechnen zunächst für festes $x \in [0, 1]$ die Extremwerte der Funktion $f_x(y, z) = -3x + y + 2z$ auf der Menge

$$M_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 = x^3\}.$$

Es ist $M_0 = \{(0, 0, 0)\}$, denn aus $y^2 + z^2 = 0$ folgt $y = z = 0$.

Sei ab jetzt $x > 0$. Wir schreiben $M_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid g(y, z) = 0\}$ mit der stetig differenzierbaren Funktion $g(y, z) = y^2 + z^2 - x^3$. Es gilt

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y, z) = 2y \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial z}(y, z) = 2z.$$

Für $x > 0$ können nicht sowohl y als auch z verschwinden, so dass in jedem Punkt $a \in M_x$ gilt: $Dg(a) \neq 0$.

Die Jacobimatrix von f_x ist $Df(a) = (1, 2)$, die von g ist $Dg(a) = (2y, 2z)$. Nach Aufgabe 23) gibt es für einen Extremalpunkt a ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit: $Df(a) = \lambda \cdot Dg(a)$, also $1 = 2y\lambda$ und $2 = 2z\lambda$. Daraus folgt: $z = 2y$. Einsetzen liefert $x^3 = 5y^2$, also $y = \pm\sqrt{x^3/5}$.

Da die Menge M_x abgeschlossen und beschränkt (es gilt stets $|y|, |z| \leq 1$ für $(y, z) \in M_x$) ist, ist sie kompakt. f_x nimmt auf M_x deshalb Maximum und Minimum an. Da die globalen Extremwerte auf M_x auch immer lokale

Extremwerte sind, folgt dass bei $\mu_x = (\sqrt{x^3/5}, 2\sqrt{x^3/5})$ ein Maximum und bei $m_x = (-\sqrt{x^3/5}, -2\sqrt{x^3/5})$ ein Minimum vorliegt. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind: $Max(x) = f_x(\mu_x) = -3x + \sqrt{5x^3}$ bzw. $Min(x) = f_x(m_x) = -3x - \sqrt{5x^3}$.
Da die Extrempunkte μ_x und m_x stetig von x abhängen, sind die lokalen bzw. globalen Extremwerte von f in denjenigen Punkten μ_x bzw. m_x zu finden, in denen die Funktionen Max bzw. Min ihre entsprechenden Extremwerte annehmen.

Die Funktion Min ist streng monoton fallend wegen $Min'(x) = -3 - \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}} \leq 3 < 0$, so dass sie ein Maximum bei 0 und ein Minimum bei 1 annimmt. Ein lokales Minimum von f kann deshalb nur für $x = 1$ im Punkt m_x vorliegen. Das ist dann gleichzeitig das globale Minimum: $P_{min} = (1, -\sqrt{1/5}, -2\sqrt{1/5})$ mit $f(P_{min}) = -3 - \sqrt{5}$.

Für die Funktion Max gilt: $Max'(x) = -3 + \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}} = -3 + \frac{3}{2} \cdot \sqrt{5x}$. Daraus folgt: $Max'(x) < 0$ für $x < \frac{4}{5}$ und $Max'(x) > 0$ für $x > \frac{4}{5}$. Deshalb ist die Funktion Max im Intervall $[0, \frac{4}{5}]$ streng monoton fallend, im Intervall $[\frac{4}{5}, 1]$ streng monoton steigend.

Es folgt, dass f für $x = 0$ und für $x = 1$ jeweils ein lokales Maximum am Wert (x, μ_x) hat, während für $x = \frac{4}{5}$ ein Sattelpunkt vorliegen muss.
Im Punkt $P_{max} = (0, 0, 0)$ ist der Funktionswert $f(P_{max}) = 0$, im Punkt $P_{lok} = ((1, +\sqrt{1/5}, +2\sqrt{1/5})$ mit $f(P_{lok}) = -3 + \sqrt{5} < 0$. Damit ist P_{max} das einzige globale Maximum, während P_{lok} das einzige weitere lokale Maximum ist. □

Alternative: Man kann auch die Aufgabe 23) direkt auf die Funktion f anwenden, um lokale Extremwerte zu bestimmen. Das funktioniert allerdings nur für $0 < x < 1$: für $x = 0$ verschwindet die Ableitung von $g(x, y, z) = y^2 + z^2 - x^3$ im (singulären) Punkt $(0, 0, 0)$, so dass man das Extremalverhalten der linearen Funktion f nicht mit Hilfe von Aufgabe 23) bestimmen kann. Für $x = 1$ hat man das Verhalten von f auf dem Randkreis M_1 separat zu untersuchen und dann zu überprüfen, ob die gefundenen Stellen auf dem Randkreis M_1 Extremwerte von f auf M sind.
Die Anwendung der Aufgabe 23) liefert für mögliche Extremwerte die Gleichung:

$$(-3, 1, 2) = \lambda \cdot (-3x^2, 2y, 2z) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{x^2},\ y = \frac{x^2}{2},\ z = x^2.$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung $x^3 = y^2 + z^2$ führt zu der Gleichung: $x^3 = \frac{5}{4}x^4$, welche für $x > 0$ nur die Lösung $x = \frac{4}{5}$ hat. Das ist aber nach den Ausführungen oben ein Sattelpunkt.