Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 5

Aufgabe 17) Lösungsskizze Es gilt $X_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | f_i(x,y) = 0\}$ mit den stetig differenzierbaren Funktionen $f_1(x,y) = x^3 - x - y^2$ und $f_2(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$.
Wir behaupten:

$$O_{i,x} = \{(x,y) \in X_i | \frac{\partial f_i}{\partial x}(x,y) \neq 0\}$$

und analog

$$O_{i,y} = \{(x,y) \in X_i | \frac{\partial f_i}{\partial y}(x,y) \neq 0\}.$$

Dass die rechte Seite jeweils in der linken enthalten ist, folgt aus dem Satz über implizite Funktionen. Wir rechnen die rechte Seite aus und zeigen anschließend, dass ein Element von X_i, welches nicht in der rechten Seite enthalten ist, auch nicht in der linken enthalten ist:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Die Nullstellen der partiellen Ableitung nach x liegen bei $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Jedoch gibt es nur für $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ Punkte in der Menge X_1. Diese gehören aber nicht zur Menge $O_{1,x}$, weil die Funktion $y = \sqrt{x^3 - x}$ für $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ein lokales Maximum hat und deshalb sich nicht lokal umkehren lässt. Das wäre aber nötig, um die Menge X_1 lokal auch in der Form $\{(\psi(y), y) | y \in I\}$ darstellen zu können. Es folgt:

$$O_{1,x} = X_1 \backslash \{(-\frac{1}{\sqrt{3}}, a), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -a)\} \quad \text{mit } a^2 = \frac{2}{\sqrt{27}}.$$

Entsprechend folgt

$$O_{1,y} = X_1 \backslash \{(-1,0), (0,0), (1,0)\},$$

denn die Menge X_1 ist jeweils die Vereinigung der beiden Graphen

$$\{(x, \sqrt{x^3 - x}) | x \in [-1, 0] \cup [1, \infty)\} \quad \text{und}$$

$$\{(x, -\sqrt{x^3 - x}) | x \in [-1, 0] \cup [1, \infty)\},$$

so dass sich X_1 in einer Umgebung der drei Punkte $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$ nicht als Graph einer einzigen Funktion darstellen lässt.
Damit gilt $X_1 = O_{1,y} \cup O_{1,x}$ und es gibt keine singulären Punkte auf X_1.

Nun zu X_2:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 2x, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Daraus ergibt sich entsprechend:

$$O_{2,x} = X_2 \backslash \{(0, 0), (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2})\} \qquad \text{und}$$

$$O_{2,y} = X_2 \backslash \{(0, 0), (-1, 0), (1, 0)\}$$

Auch hier überlegt man sich, dass die Menge sich in einer Umgebung der herausgenommenen Punkte nicht als Graph einer Funktion darstellen lässt.

Hier ist $(0, 0)$ ein singulärer Punkt: es schneiden sich die beiden Zweige $\{(x, x \cdot \sqrt{1 - x^2}) | x \in [-1, 1]\}$ und $\{(x, -x \cdot \sqrt{1 - x^2}) | x \in [-1, 1]\}$ transversal in diesem singulären Punkt, so dass sich die Nullstellenmenge lokal um diesen Punkt weder in der einen Richtung noch in der anderen Richtung als Graph einer Funktion darstellen lässt.
Der singuläre Punkt ist der einzige, in dem beide partiellen Ableitungen verschwinden.

Aufgabe 18) Lösungsskizze: Man rechnet sofort nach mit $\xi = (1, 1)$ und $\eta \in \mathbb{R}^2$ beliebig:

$$f(\xi) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\xi) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi) = -6,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi) = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi) = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi) = -6,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\eta) = 6, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\eta) = 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\eta) = -6, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\eta) = 0.$$

Dann lautet die Taylorformel für die Entwicklung um den Punkt ξ:

$$f(x,y) = f(\xi) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi)\cdot(x-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi)\cdot(y-1)$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi)\cdot(x-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\xi)\cdot(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi)\cdot(y-1)^2 + R_3(x,y)$$

$$= -2 - 6(y-1) + 3(x-1)^2 - 6(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + R_3(x,y)$$

mit dem Restglied, wobei $\eta \in \mathbb{R}^2$ auf der Verbindungsstrecke zwischen ξ und (x,y) liegt:

$$R_3(x,y) = \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\eta)(x-1)^3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(\eta)(x-1)^2(y-1)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(\eta)(x-1)(y-1)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\eta)(y-1)^3 = (x-1)^3 - 3(x-1)(y-1)^2.$$

Da die Ausgangsfunktion ein Polynom dritten Grades ist, hängt das Restglied nicht von η ab. In den beiden genannten Punkten ergibt sich für das Restglied: $R_3(0,0) = (-1)^3 - 3(-1)(-1)^2 = 2$ sowie $R_3(2,1) = 1^3 - 3\cdot 1\cdot 0 = 1$. $\square$

Aufgabe 19) Lösungsskizze: a) Eine Äquivalenzumformung ergibt:

$$y'(t) = \frac{\cos(t)}{y(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad 2y'(t)\cdot y(t) = 2\cos(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(y(t))^2 = 2\frac{d}{dt}\sin(t).$$

Mit der Zusatzbedingung $y(0) = 2$ folgt dann sofort: $(y(t))^2 = 4 + 2\sin(t)$, also $y(t) = \sqrt{4 + 2\sin(t)}$. Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, ist dort stetig differenzierbar und erfüllt dort die Differentialgleichung. $\square$

b) Die Differentialgleichung $z'(t) = \frac{-v\cdot z(t)}{k+z(t)}$ besitzt in einer Umgebung von 0 eine stetig differenzierbare Lösung mit $z(0) = 1$. Wegen $k > 0$ ist der Nenner der rechten Seite in einer Umgebung von 0 niemals 0, ebenso ist der Zähler in einer geeigneten Umgebung U niemals 0. Da $z'(t) \neq 0$ für $t \in U$ gilt, ist z dort eine umkehrbare Funktion. Bezeichnet ϕ die Umkehrfunktion, so liefert Einsetzen und Anwenden der Kettenregel:

$$1 = \frac{\partial x}{\partial x} = (z\circ\phi)'(x) = z'(\phi(x))\cdot\phi'(x) = \frac{-v\cdot z(\phi(x))}{k + z(\phi(x))}\cdot\phi'(x) = \frac{-v\cdot x}{k+x}\cdot\phi'(x),$$

woraus sofort

$$\phi'(x) = -\frac{k+x}{v \cdot x} = -\frac{k}{vx} - \frac{1}{v}$$

folgt. Dann gilt aber

$$\phi(x) = -\frac{k}{v} \cdot \log(x) - \frac{x}{v} + c.$$

Hierbei bestimmt sich die Konstante c mit Hilfe der Gleichung $\phi(1) = 0$ zu $c = \frac{1}{v}$. Also gilt:

$$\phi(x) = -\frac{k}{v} \cdot \log(x) + \frac{1-x}{v}.$$

Diese monoton fallende Funktion ist für alle positiven reellen Zahlen x definiert und ist dort die Umkehrfunktion der auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion z.

Aufgabe 20) Lösungsskizze: a) Mit dem Vektorraum

$$Sym_n(\mathbb{R}) = \{A \in M(n,n;\mathbb{R}) \mid A = {}^tA\}$$

der symmetrischen Matrizen hat man den Isomorphismus

$$M(n,n;\mathbb{R}) \cong Sk_n(\mathbb{R}) \oplus Sym_n(\mathbb{R}),$$

der durch die Abbildung

$$A \mapsto \frac{1}{2} \cdot (A - {}^tA\ ,\ A + {}^tA)$$

vermittelt wird. Mit der Abbildung

$$\Phi : M(n,n;\mathbb{R}) \to Sym_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A \cdot {}^tA - E$$

gilt $O_n(\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(0)$. Da die Komponenten von Φ (quadratische) Polynome in den Koeffizienten von A sind, ist Φ stetig differenzierbar. Die Ableitung von Φ in einem Punkt B ist die lineare Abbildung $X \mapsto X \cdot {}^tB + B \cdot {}^tX$, wie man sich analog zur Aufgabe 11) sofort überlegt. Im Punkt $B = E$ ergibt sich speziell die lineare Abbildung $X \mapsto X + {}^tX$. Die Einschränkung dieser Abbildung auf den Unterraum der symmetrischen Matrizen ist einfach die Multiplikation mit dem Skalar 2, also eine invertierbare lineare Abbildung. Wenn man jetzt den Satz über implizite Funktionen 20.8. anwendet, wobei man den $\mathbb{R}^m$ nach geeigneter Basiswahl mit dem Raum $Sym_n(\mathbb{R})$ identifiziert und den in 20.8. auftretenden Raum $\mathbb{R}^n$ durch den Raum $Sk_n(\mathbb{R})$ ersetzt, folgt die Behauptung relativ leicht: Dazu sollte man noch die affine Koordinatentransformation $X \mapsto X+E$ vor die Abbildung Φ schalten. Weiterhin ist zu beachten, dass die Eindeutigkeit der Abbildung φ in 20.8. nichts anderes bedeutet, als dass (id, φ) lokal eine bijektive Abbildung ϕ zwischen $Sk_n(\mathbb{R})$ und $\Phi^{-1}(0)$ vermittelt. Die Form (id, φ) dieser Abbildung übersetzt sich nach der Identifikation $M(n, n; \mathbb{R}) = Sk_n(\mathbb{R}) \oplus Sym_n(\mathbb{R})$ in die Bedingung:

$$\frac{1}{2} \cdot \big(\phi(A) - {}^t\phi(A), \phi(A) + {}^t\phi(A)\big) = (A, \varphi(A)).$$

Die erste Komponente dieser Gleichung ist die gesuchte Gleichung

$$\phi(A) - {}^t\phi(A) = 2 \cdot A.$$

$\square$

b) Für $\phi(t) := \phi\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ lauten die Gleichungen

$$\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \qquad \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix} = E$$

Da orthogonale Matrizen nur die Determinanten 1 und -1 haben können, gilt $\det(\phi(t)) = 1$ für alle t aus einer Umgebung von 0, denn $\phi(0)$ hat als Einheitsmatrix die Determinante 1. Dann hat aber $\phi(t)$ die Form $\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix}$ (das ist eine elemtare Übungsaufgabe in linearer Algebra), so dass sich obige Gleichungen auf folgendes reduzieren:

$$2b(t) = 2t \quad \text{und} \quad a(t)^2 + b(t)^2 = 1.$$

Daraus ergibt sich sofort die Darstellung

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} & t \\ -t & \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad \text{für } t \in I,$$

wobei man $I = (-1, 1)$ wählen kann. $\square$