Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 3

Aufgabe 8*) Lösungsskizze Wir behaupten, dass $|B_n(t)| \leq n! \cdot e^t$ für alle n und alle $t \geq 0$ gilt:
Das zeigen wir mittels Induktion nach n, wobei der Induktionsanfang $n = 0$ wegen $e^t \geq 1 = B_0(t)$ für $t \geq 0$ klar ist. Dann bemerken wir die Identität:

$$B_n(t) - B_n(0) = \int_0^t B_n'(\tau)d\tau = n \cdot \int_0^t B_{n-1}(\tau)d\tau,$$

woraus mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$|B_n(t) - B_n(0)| \leq n \cdot \int_0^t |B_{n-1}(\tau)|d\tau \leq n \cdot (n-1)! \cdot \int_0^t e^\tau d\tau = n! \cdot (e^t - 1).$$

Weiter gilt:

$$B_n(0) = -\int_0^1 B_n(\tau)d\tau + B_n(0) \cdot \int_0^1 d\tau = \int_0^1 (B_n(0) - B_n(\tau))d\tau,$$

woraus sich die Abschätzung

$$|B_n(0)| \leq \int_0^1 |B_n(\tau) - B_n(0)|d\tau \leq n! \cdot \int_0^1 (e^\tau - 1)d\tau = n!(e-2) < n!$$

ergibt. Kombiniert mit der oberen Abschätzun $|B_n(t) - B_n(0)| \leq n!(e^t - 1)$ folgt daraus:

$$|B_n(t)| \leq |B_n(t) - B_n(0)| + |B_n(0)| \leq n!(e^t - 1 + 1) = n! \cdot e^t.$$

Damit ist die Formel für $t \geq 0$ durch Induktion bewiesen worden. Der Fall $t < 0$ wird mittels der Formel $B_n(t) = (-1)^n \cdot B_n(1-t)$ (siehe Skript) auf den Fall $t > 0$ zurückgeführt: dann bekommen wir eine Abschätzung der Form

$$|B_n(t)| \leq n! \cdot e^{max(t,1-t)}.$$

Für die Summanden der Reihe in Aufgabe 8 ergibt sich jetzt die Abschätzung:

$$|B_n(t) \cdot \frac{z^n}{n!}| \leq |z|^n \cdot e^{max(t,1-t)}.$$

Daraus folgt sofort, dass die Reihe für $z \in [-a, a]$ und $t \in [-b, b]$ gleichmäßig konvergiert, sofern $a < 1$ ist (Vergleich mit der geometrischen Reihe).
Die Behauptung in der Aufgabenstellung ist damit bewiesen. $\square$

Bemerkung: Tatsächlich konvergiert die Reihe, sobald $a < 2\pi$ gilt. Das kann man einerseits aus Resultaten herleiten, die in der Vorlesung "Funktionentheorie" bewiesen werden: 2π ist der Radius des größten Kreises in der komplexen z-Ebene um den Nullpunkt, für den der Nenner in der Formel von 8d) keine Nullstelle hat (abgesehen von der Nullstelle $z = 0$, die sich aber gegen die Nullstelle von z im Zähler "wegkürzt".

Andererseits tauchen die Bernoullizahlen $B_n(0)$ auch in einer Formel für die Werte der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für gerade ganze Zahlen auf. Damit kann man eine Abschätzung der Form $|B_n(0)| \leq \frac{c \cdot n!}{(2\pi)^n}$ herleiten, aus der ebenfalls die gleichmäßige Konvergenz für $a < 2\pi$ folgt.

Aufgabe 9) Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi) & -r\sin(\phi)\cos(\psi) & -r\cos(\phi)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\psi) & -r\sin(\phi)\sin(\psi) & r\cos(\phi)\cos(\psi) \\ \sin(\phi) & r\cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10) Lösung:

a) Sei $y \in K_\epsilon(\xi) = \{x \in X \mid d(x, \xi) < \epsilon\}$, also $d(y, \xi) < \epsilon$. Sei $\delta = \epsilon - d(y, \xi)$. Dann gilt $\delta > 0$, und es ist $K_\delta(y) \subset K_\epsilon(\xi)$: Aus $x \in K_\delta(y)$ folgt nach der Dreiecksungleichung $d(x, \xi) \leq d(x, y) + d(y, \xi) < \delta + d(y, \xi) = \epsilon$, also $x \in K_\epsilon(\xi)$. $\square$

b) Seien A und B offene Mengen in einem metrischen Raum X und sei $x \in A \cap B$. Um zu zeigen, dass $A \cap B$ offen ist, reicht es zu zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt mit $K_\epsilon(x) \subset A \cap B$. Weil A und B offen sind, gibt es aber $\alpha, \beta > 0$ mit $K_\alpha(x) \subset A$ und $K_\beta(x) \subset B$. Mit $\epsilon = \min(\alpha, \beta) > 0$ folgt $K_\epsilon(x) \subset K_\alpha(x) \subset A$ und $K_\epsilon(x) \subset K_\beta(x) \subset B$. Dann ist aber $K_\epsilon(x) \subset A \cap B$. $\square$

c) Sei $A \subset X$ offen, $f : Y \to X$ stetig und $y \in f^{-1}(A)$. Weil A offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(f(y)) \subset A$. Dann gibt es nach dem ϵ-δ-Kriterium ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft: $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Das bedeutet aber $f(K_\delta(y)) \subset K_\epsilon(f(y))$. Daraus folgt aber $f(K_\delta(y)) \subset A$ und damit $K_\delta(y) \subset f^{-1}(A)$. Damit ist $f^{-1}(A)$ als offene Menge erkannt. □

Aufgabe 11) Lösungsskizze: Die genannte euklidische Metrik stammt von der Norm

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \quad \text{für} \quad A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}.$$

Bezüglich des Matrizenprodukts gilt die Abschätzung

$$\|A \cdot B\| \le \sqrt{n} \cdot \|A\| \cdot \|B\|$$

Im Beweis der Abschätzung benutzen wir die Ungleichung von Cauchy-Schartz:

$$\|A \cdot B\|^2 = \sum_{i,k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)^2 \le \sum_{i,k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk}^2 \right)$$

$$\le \sum_{i,k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \cdot \left(\sum_{j,l=1}^{n} b_{jl}^2 \right) = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \cdot \|B\|^2 = n \cdot \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.$$

a) Es gilt für $X \in V$:

$$Q(B + X) = (B + X) \cdot (B + X) = B \cdot B + B \cdot X + X \cdot B + X \cdot X$$

$$= Q(B) + l_B(X) + R(X)$$

mit der linearen Abbildung $l_B : V \to V, X \mapsto BX + XB$ und dem Restterm $R(X) = X \cdot X = \|X\| \cdot r(X)$. Dabei gilt $\|r(X)\| = \|X\|^{-1} \cdot \|X \cdot X\| \le \|X\|^{-1} \cdot \sqrt{n} \cdot \|X\| \cdot \|X\| = \sqrt{n} \cdot \|X\|$. Das impliziert, dass der Restterm $r(X)$ gegen 0 konvergiert für $X \to 0$. Dann gilt $R(X) = o(X)$ und die lineare Abbildung l_B ist die Ableitung von Q im Punkt B. □

b) Die Menge $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist offen. Nach Aufgabe 10 ist dann auch das Urbild von $\mathbb{R}^*$ unter der stetigen Determinantenabbildung $\det : V \to \mathbb{R}$ offen. Das Urbild besteht aber gerade aus der $GL(n; \mathbb{R})$, der Menge der invertierbaren Matrizen. □

c) Nach der Leibnizformel lässt sich die Determinante als Polynom in den Eintägen der Matrix schreiben:

$$\det((a_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} sign(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}.$$

Da Polynome differenzierbar sind, ist es auch die Determinante. Explizit: Polynome in mehreren Variablen sind partiell differenzierbar, wobei die partiellen Ableitungen wieder Polynome und damit stetige Funktionen sind, d.h. Polynome sind stetig partiell differenzierbar und damit auch total differenzierbar.

Um die Ableitung in der Einheitsmatrix zu bestimmen, berechnen wir die partiellen Ableitungen nach einer Variablen a_{ij}:
$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}}$ lässt sich wie folgt in der Einheitsmatrix E auswerten: Nach der Produktregel ist von einem Produkt $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ genau ein Faktor abzuleiten, die übrigen sind an der Einheitsmatrix auszuwerten. Da eine von id verschiedene Permutation σ immer mindestens an zwei Stellen nicht identisch operiert, ergibt das Einsetzen bei den von id verschiedenen Permutationen immer einen Faktor 0, so dass die partielle Ableitung nur von $\Pi_{i=1}^{n} a_{ii}$ zu berechnen ist: Hier ergibt nur die Ableitung nach einer Variablen a_{ii} ein nichttriviales Ergebnis, nämlich 1 nach Einsetzen der Einheitsmatrix.
Damit folgt $\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}}|_{A=E} = 1$ für $i = j$, aber $\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}}|_{A=E} = 0$ für $i \neq j$. Damit ist klar, dass die Ableitung der Determinante die lineare Abbildung $(a_{ij}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ist. Das ist die Spur: $A \mapsto Spur(A)$. □

d) Wir behaupten, dass das Invertieren in einem Punkt $B \in GL(n; \mathbb{R})$ differenzierbar ist, und dass die Ableitung die lineare Abbildung

$$l : X \mapsto -B^{-1} \cdot X \cdot B^{-1} \quad \text{ist:}$$

Dazu bemerken wir zunächst, dass das Invertieren von Matrizen in der $GL(n, \mathbb{R})$ stetig ist. Deshalb ist die Abbildung $X \mapsto (B+X)^{-1}$ in einer Umgebung von 0 stetig. Gleiches gilt für die Normabbildung $X \mapsto \|(B+X)^{-1}\|$. In einer kompakten Umgebung U von 0 nimmt die Normfunktion aber ihr Maximum M an.
Wir definieren einen Restterm $R(X)$ durch die Formel

$$(B + X)^{-1} = B^{-1} + l(X) + R(X).$$

Dann gilt:

$$E = (B + X) \cdot (B^{-1} - B^{-1} \cdot X \cdot B^{-1} + R(X).$$

Ausmultiplizieren ergibt:

$$E = E - B \cdot B^{-1} \cdot X \cdot B^{-1} + X \cdot B^{-1} - X \cdot B^{-1} \cdot X \cdot B^{-1} + (B + X) \cdot R(X)$$

Daraus folgt:

$$R(X) = (X + B)^{-1} \cdot X \cdot B^{-1} \cdot X \cdot B^{-1}.$$

Mehrfaches Anwenden der Abschätzung im Lemma ergibt für $X \in U$:

$$\|R(X)\| \leq M \cdot n^2 \cdot \|X\|^2 \cdot \|B^{-1}\|^2$$

Das impliziert sofort, dass der Restterm $R(X)$ von der Ordnung $o(X)$ ist. Deshalb ist l die Ableitung von I in einem Punkt B. $\square$

Aufgabe 12) Lösungsskizze: a) In der offenen Menge $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ gilt stets $x^2 + y^2 \neq 0$. Da Polynome stetige Funktionen sind und da der Quotient zweier stetiger Funktionen wieder stetig ist, solange der Nenner von 0 verschieden ist, ist f in der Menge U stets stetig, so dass es nur auf die Stetigkeit im Nullpunkt $(0,0)$ ankommt.

Da die Menge $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ kompakt ist, nimmt die stetige Polynomfunktion P auf S^1 ihr Maximum M und ihr Minimum m an, etwa $M = P(x_1, y_1)$ und $m = P(x_2, y_2)$.

Jedes $(x,y) \in U$ lässt sich in der Form $(x,y) = \rho \cdot (\tilde{x}, \tilde{y})$ darstellen mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}) \in S^1$.

Dann gilt:

$$f(x,y) = \frac{P(\rho\tilde{x}, \rho\tilde{y})}{(\rho^2)^n} = \rho^{d-2n} \cdot P(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Es folgt: $m \cdot \rho^{d-2n} \leq f(x,y) \leq M \cdot \rho^{d-2n}$.

Lemma Es gilt genau dann $M = m$, wenn P von der Form

$$P = M \cdot (x^2 + y^2)^{d/2} \quad \text{ist.}$$

Beweis Lemma: Ist P von der Form, so ist P auf der Menge S^1 offensichlich konstant gleich M. Ist umgekehrt $M = m$, so ist P auf der Menge S^1 konstant. Wegen $P(-x,-y) = (-1)^d \cdot P(x,y)$ muss d dann gerade sein, wenn P nicht das Nullpolynom ist. Nach Subtraktion von $M \cdot (x^2 + y^2)^{d/2}$

können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass $M = m = 0$ ist, so dass P dann auf S^1 konstant gleich 0 ist. Wegen der Homogenität ist dann P aber die Nullfunktion, und damit das Nullpolynom. Dann ist das ursprüngliche P von der Form $M \cdot (x^2 + y^2)^{d/2}$. Das Lemma ist bewiesen.

Im Fall $d > 2n$ folgt daraus, dass $|f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \max(|m|, |M|)$ für alle $(x, y) \in U$ gilt. Dann ist aber f genau dann stetig, wenn $f(0, 0) = 0$, also $r = 0$ gilt.

Im Fall $d = 2n$ gilt $f(x, y) = f(\tilde{x}, \tilde{y})$. Es folgt $f(\frac{x_1}{n}, \frac{y_1}{n}) = M$ und $f(\frac{x_2}{n}, \frac{y_2}{n}) = m$. Da die Folgen $(\frac{x_1}{n}, \frac{y_1}{n})$ und $(\frac{x_2}{n}, \frac{y_2}{n})$ beide gegen $(0, 0)$ konvergieren, kann f nur dann stetig sein, wenn $M = m$ gilt, d.h. wenn $P = M \cdot (x^2 + y^2)^{d/2}$ gilt. Dann ist aber f konstant gleich M auf U und ist genau dann stetig, wenn $r = M$ gilt.

Sei jetzt $d < 2n$. Da P nicht das Nullpolynom ist, nimmt P auf S^1 einen von 0 verschiedenen Wert an, etwa $P(\tilde{x}, \tilde{y}) = a$. Da die Folge $f(\frac{\tilde{x}}{n}, \frac{\tilde{y}}{n}) = n^{2n-d} \cdot a$ dann unbeschränkt ist, obwohl $(\frac{\tilde{x}}{n}, \frac{\tilde{y}}{n})$ nach $(0, 0)$ konvergiert, kann f im Punkt $(0, 0)$ nicht stetig sein. □

b) **Ergebnis:** $\frac{\partial f_{P,n,r}}{\partial x} = f_{\tilde{P},\tilde{n},\tilde{r}}$ mit

$$\tilde{P} = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \cdot (x^2 + y^2) - 2nx \cdot P(x, y), \qquad \tilde{n} = n + 1,$$

$$\tilde{r} = a_d \quad \text{falls } d = 2n + 1, \qquad \tilde{r} = 0 \quad \text{falls } d > 2n + 1$$

c) Im Fall $P(x, y) = xy$ ist $d = 2$, also $d = 2n$, wenn $n = 1$. Die Funktion f ist also nicht stetig im Punkt $(0, 0)$. Sie ist aber nicht nur in der Menge U partiell differenzierbar, sondern auch im Punkt $(0, 0)$, denn es gilt $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$ für alle x, y, so dass die partiellen Ableitungen existieren und gleich 0 sind. □