Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 2

Aufgabe 5) Lösungsskizze Mit der Abkürzung $z = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}$ konvergiert die Reihe (Abschätzung durch die geometrische Reihe) für alle y, für die $|z| < 1$ ist.
Sind $0 < a < b < \infty$ reelle Zahlen, so gilt für alle $y \in [a,b]$:

$$1 < a+1 \leq y+1 \leq b+1 \quad \text{und deshalb} \quad 0 < \frac{1}{b+1} \leq \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{a+1} < 1,$$

$$\text{woraus folgt} \qquad -1 < \tilde{a} = 1 - \frac{2}{a+1} \leq 1 - \frac{2}{y+1} \leq 1 - \frac{2}{b+1} = \tilde{b} < 1$$

Da Potenzreihen auf jedem abgeschlossenen Intervall im Innern Ihres Konvergenzradius gleichmäßig konvergieren, folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe für $y \in [a,b]$, also $z \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$. Für den Rest des Beweises gibt es jetzt zwei Varianten:

Erste Variante: Wir berechnen die Potenzreihe in der Variablen z, indem wir die Ableitung der Potenzreihe nach der Variablen z mit Hilfe von Satz 19.3.2. ausrechnen:

$$\text{Mit } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \cdot z^{2k+1} \text{ gilt } f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot z^{2k} = \frac{2}{1-z^2} = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z}.$$

Daraus folgt: $f(z) = c + \log(1+z) - \log(1-z) = c + \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ mit einer Konstanten c. Für $z = 0$ ist $f(z) = 0$ und $\log(1+z) - \log(1-z) = 0$, so dass sich $c = 0$ ergibt.
Einsetzen ergibt:

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1 + \frac{y-1}{y+1}}{1 - \frac{y-1}{y+1}} = \frac{(y+1) + (y-1)}{(y+1) - (y-1)} = y.$$

Daraus folgt sofort $f(z) = \log(y)$. $\square$

Zweite Variante: Wir berechnen die gliedweise Ableitung der Reihe nach y, die wir $g(y)$ nennen:

$$g(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+1} \cdot (2k+1) \cdot \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{2k} \cdot \frac{2}{(y+1)^2}$$

$$= \frac{4}{1 - \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2} \cdot \frac{1}{(y+1)^2} = \frac{4}{(y+1)^2 - (y-1)^2} = \frac{1}{y}.$$

Da diese Reihe gleichmäßig für alle $y \in [a, b]$ konvergiert, kann man die Folgerung aus 19.2. anwenden und erhält, dass die Ausgangsreihe als Funktion von y differenzierbar mit Ableitung $g(z) = \frac{1}{y}$ ist. Da die Ausgangsreihe für $y = 0$ verschwindet, muss sie gegen $\log(y)$ konvergieren. $\square$

Aufgabe 6) Lösungsskizze: a) Die linearen Abbildungen eines Vektorraums in einen anderen bilden bekanntlich einen Vektorraum. Darin bilden die stetigen Abbildungen einen Unterraum:
Sind $l_1, l_2 : V_1 \to V_2$ stetig, so gilt $\|l_j(v)| \leq \|l_j\| \cdot \|v\|$ für $j = 1, 2$. Daraus folgt:

$$\|(l_1 + l_2)(v)\| \leq \|l_1(v)\| + \|l_2(v)\| \leq \|l_1\| \cdot \|v\| + \|l_2\| \cdot \|v\| \leq (\|l_1\| + \|l_2\|) \cdot \|v\|,$$

und deshalb ist nach dem Kriterium 19.1.1. auch $l_1 + l_2$ stetig mit $\|l_1 + l_2\| \leq \|l_1\| + \|l_2\|$. Ebenso folgt für $c \in \mathbb{R}$:

$$\|(cl_1)(v)\| = \|c \cdot l_1(v)\| = |c| \cdot \|l_1(v)\| \leq |c| \cdot \|l_1\| \cdot \|v\|,$$

woraus die Stetigkeit von cl_1 folgt. Dieselbe Rechnung liefert

$$\|cl_1\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|(cl_1)(v)\|}{\|v\|} = |c| \cdot \sup_{v \neq 0} \frac{\|(l_1)(v)\|}{\|v\|} = |c| \cdot \|l_1\|.$$

Gilt $\|l\| = 0$, so bedeutet das: $\|l(v)\| \leq \|v\| \cdot \|l\| = 0$ und damit $l(v) = 0$ für alle $v \in V_1$. Daraus folgt aber $l = 0$. Damit ist nicht nur gezeigt, dass $L(V_1, V_2)$ ein Vektorraum ist, sondern es sind auch die Axiome einer Norm überprüft worden. $\square$

b) Sei V_2 ein Banachraum und l_n eine Cauchyfolge in $L(V_1, V_2)$. Dann ist für jedes $v \in V_1$ die Folge $l_n(v)$ eine Cauchyfolge in V_2 wegen der Ungleichung $\|l_n(v) - l_m(v)\| \leq \|l_n - l_m\| \cdot \|v\|$ und weil l_n eine Cauchyfolge ist.

Weil V_2 vollständig ist, konvergiert deshalb die Folge $l_n(v)$ in V_2 gegen einen Grenzwert $l(v)$. Es gilt dann

$$l(v+w) = \lim_{n\to\infty} l_n(v+w) = \lim_{n\to\infty} (l_n(v) + l_n(w))$$

$$= \lim_{n\to\infty} l_n(v) + \lim_{n\to\infty} l_n(w) = l(v) + l(w)$$

und entsprechend $l(cv) = cl(v)$. Damit ist l eine lineare Abbildung.
Weil jede Cauchyfolge beschränkt ist, gibt es $C > 0$ mit $\|l_n\| \leq C$ für alle n. Es folgt $\|l_n(v)\| \leq \|l_n\| \cdot \|v\| \leq C \cdot \|v\|$ und daraus sofort $\|l(v)\| \leq C \cdot \|v\|$. Damit ist $l : V_1 \to V_2$ auch eine stetige Abbildung.
Weil l_n eine Cauchyfolge ist, gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_0(\epsilon)$ mit $\|l_m - l_n\| < \epsilon$ für $m, n \geq N_0(\epsilon)$. Dann folgt wegen $\|(l - l_n)(v)\| = \lim_{m\to\infty} \|l_m(v) - l_n(v)\|$ und $\|l_m(v) - l_n(v)\| \leq \|l_m - l_n\| \cdot \|v\| \leq \epsilon \cdot \|v\|$, dass $\|(l - l_n)(v)\| \leq \epsilon \cdot \|v\|$ für alle $n \geq N_0(\epsilon)$ gilt, woraus $\|l - l_n\| \leq \epsilon$ für alle $n \geq N_0(\epsilon)$ folgt. Das impliziert aber die Konvergenz der Folge l_n gegen l. Also ist $L(V_1, V_2)$ auch ein vollständiger metrischer Raum, also ein Banachraum nach Teil a). □

c) Aus Aufgabe a) folgt mittels vollständiger Induktion: $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. Dann bilden aber die Partialsummen der Exponentialreihe $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ eine Cauchyfolge, denn aus der Dreiecksungleichung und Aufgabe 1 folgt:

$$\|\sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} A^k\| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

und die Partialsummen der Exponentialreihe $\exp(\|A\|)$ bilden eine Cauchyfolge. Da $L(V, V)$ nach b) ein Banachraum ist, konvergiert deshalb die Exponentialreihe. □

Aufgabe 7) Lösungsskizze:
a) $M_1 \subset M_2$ folgt, weil aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot r^i$ die gewöhnliche Konvergenz von $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot r^i$ folgt.

$M_2 \subset M_3$ folgt aus trivialen Gründen, weil jede Zahl $r \geq 0$ reell ist und dann $|r| = r$ gilt.

$M_3 \subset M_4$ folgt, weil die Summanden einer konvergenten Reihe immer eine Nullfolge bilden.

$M_4 \subset M_5$: Sei $\rho \in M_4$, etwa $\rho = |r|$ mit $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|a_i| \cdot \rho^i = |a_i \cdot r^i|$, und da jede Nullfolge beschränkt ist, folgt $\rho \in M_5$. □

b) Aus a) folgt trivialerweise $\sup M_1 \leq \sup M_2 \leq \sup M_3 \leq \sup M_4 \leq \sup M_5$, so dass es reicht zu zeigen, dass $\sup M_5 \leq \sup M_1$ ist. Angenommen es ist $\sup M_5 > \sup M_1 = a$. Dann ist a keine obere Schranke für M_5, d.h. es gibt $r > a$ mit der Eigenschaft, dass $|a_i| \cdot r^i$ eine beschränkte Folge ist. Sei $b = \frac{r+a}{2}$. Dann ist $r > b > a$. Dann gilt aber $b \in M_1$ im Widerspruch zur Definition von $a = \sup M_1 < b$: Denn nach dem Beweis von 19.3.1 konvergiert die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \cdot b^i$ wegen $r > b$, wenn die Folge $|a_i| \cdot r^i$ beschränkt ist. Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung.

$M_1 \neq M_2$ für $a_i = \frac{(-1)^i}{i+1}$ (harmonische Reihe). Dann ist $1 \in M_2$, aber $1 \notin M_1$.

$M_2 \neq M_3$ für $a_i = \frac{1}{i+1}$. Dann ist $1 = |-1| \in M_3$ wegen der Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe, aber es ist $1 \notin M_2$.

$M_3 \neq M_4$ für $a_i = \frac{1}{i+1}$ für gerades i und $a_i = 0$ für ungerades i. Dann gilt $1 \in M_4$, weil $a_i \cdot 1^i$ eine Nullfolge ist, aber die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot r^i$ konvergiert weder für $r = 1$ noch für $r = -1$, d.h. es ist $1 \notin M_3$.

$M_4 \neq M_5$ für die konstante Folge $a_i = 1$. Dann ist $1 \in M_5$, aber $1 \notin M_4$. $\square$

Aufgabe 8) Lösungshinweise:

a) Die Aufgabe ist falsch gestellt: die Reihe konvergiert nicht für alle $z \in \mathbb{R}$. Eine korrigierte Version wird als Zusatzaufgabe für Tüftler auf dem neuen Blatt 3 noch einmal gestellt. Für das folgende verwenden wir die Version:

Zeigen Sie, dass es $a > 0$ gibt, so dass für jedes $b > 0$ die Reihe gleichmäßig in $z \in [-a, a]$ und $t \in [-b, b]$ konvergiert.

b) Die Partialsummen $f_t(z)_k := \sum_{n=0}^{k} B_n(t) \cdot \frac{z^n}{n!}$ bestehen aus Polynomen in den Variablen t und z, die nach den Differentiationsregeln $B'_{n+1}(t) = (n+1) \cdot B_n(t)$ und $B'_0(t) = 1' = 0$ abgeleitet werden können:

$$\frac{\partial f_t(z)_k}{\partial t} = \sum_{n=0}^{k} B'_n(t) \cdot \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{k} n \cdot B_{n-1}(t) \cdot \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{k-1} B_n(t) \cdot \frac{z^{n+1}}{n!} = z \cdot f_t(z)_{k-1}.$$

Da die Folge der Ableitungen nach Teil a) lokal gleichmäßig in t konvergiert, kann man Differentiation und Reihenlimes vertauschen und erhält:

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = z \cdot f_t(z). \quad \square$$

c) Für das Integral über die Partialsummen gilt analog:

$$\int_0^1 f_t(z)_k dt = \sum_{n=0}^{k} \int_0^1 B_n(t)dt \cdot \frac{z^n}{n!} = \int_0^1 B_0(t)dt \cdot \frac{z^0}{0!} = 1.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolgen im Integranden folgt $\int_0^1 f_t(z)dt = 1$. □

d) Laut b) erfüllt $f_t(z)$ als Funktion in t die lineare Differentialgleichung $f' = z \cdot f$. Da der eindimensionale Lösungsraum von der Funktion $t \mapsto e^{zt}$ erzeugt wird, gibt es $c_z \in \mathbb{R}$ mit $f_t(z) = c_z \cdot e^{tz}$. Nach c) ist aber:

$$1 = \int_0^1 f_t(z) = c_z \cdot \int_0^1 e^{tz} dt = c_z \cdot \frac{e^z - 1}{z}.$$

Daraus folgt $c_z = \frac{z}{e^z-1}$ und damit ergibt sich sofort die Behauptung $f_t(z) = \frac{z \cdot e^{tz}}{e^z-1}$. Diese Identität gilt für alle (z, t), für die die Reihe lokal gleichmäßig konvergiert. □