Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 1

Aufgabe 1) Lösungsskizze
Aus den Voraussetzungen folgt nach 19.1.1. die Existenz von Konstanten C_1, C_2, so dass gilt:

$$\|L_1(v_1)\| \leq C_1 \cdot \|v_1\| \quad \text{und} \quad \|L_1(v_2)\| \leq C_2 \cdot \|v_2\|$$

für alle $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. Nach der Definition des Supremums gelten diese Ungleichungen auch für $C_1 = \|L_1\|$ und $C_2 = \|L_2\|$.
Daraus folgt sofort:

$$\|L(v)\| = \|L_2(L_1(v))\| \leq C_2 \cdot \|L_1(v)\| \leq C_2 \cdot (C_1 \cdot \|v\|),$$

d.h. mit $C = C_1 \cdot C_2$ ist das Stetigkeitskriterium 19.1.1. für die Abbildung L erfüllt, d.h. L ist als Komposition von linearen Abbildungen linear, und auch wieder stetig. Der letzte Umstand folgt zwar direkt daraus, dass die Komposition stetiger Abbildungen stetig ist, man bekommt mit obiger Argumentation aber auch die zweite Behauptung:
Nach der Definition eines Supremums als kleinste obere Schranke gilt $\|L\| \leq C$. Das bedeutet aber $\|L\| \leq \|L_2\| \cdot \|L_1\|$. $\square$

Aufgabe 2) Lösungsskizze: a) Nach Aufgabe 50 (f) gilt $\sin(\phi + \pi) = -\sin(\phi)$ und $\cos(\phi + \pi) = -\cos(\phi)$. Weil wir gegebnenefalls (x, y) durch $(-x, -y)$ ersetzen können, reicht es deshalb zu zeigen, dass jedes Paar (x, y) mit $x^2 + y^2 = 1$ und $y \geq 0$ in der Form $x = \cos(\phi), y = \sin(\phi)$ mit $0 \leq \phi \leq \pi$ dargestellt werden kann. Aus $x^2 + y^2 = 1$ folgt $-1 \leq x \leq 1$. Wegen $\cos(0) = 1, \cos(\pi) = -1$ folgt aus der Stetigkeit von cos unter Benutzung des Zwischenwertsatzes, dass x von der Form $x = \cos(\phi)$ mit $0 \leq \phi \leq \pi$ ist. Aus $x^2 + y^2 = 1 = \cos(\phi)^2 + \sin(\phi)^2$ folgt dann $y = \pm\sin(\phi)$. Wegen $y \geq 0$ und $\sin(\phi) \geq 0$ muss aber $y = \sin(\phi)$ gelten. Damit ist die Existenz einer Darstellung bewiesen.

Die Eindeutigkeit von ϕ folgt daraus, dass die Vorzeichen von $\sin(\phi)$ und $\cos(\phi)$ bestimmen, in welchem der vier Intervalle $[0, \frac{\pi}{2}),\ [\frac{\pi}{2}, \pi),\ [\pi, \frac{3\pi}{2}),\ [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ die Zahl ϕ liegt, und dass sowohl sin als auch cos in jedem der Intervalle streng monoton ist.

b) Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion gilt auch für komplexe Argumente. Deshalb ist $\exp(x+iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy)$ und es muss lediglich $\exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y)$ gezeigt werden. Das ist in unserem Fall die Definiton im Skript 15.2. Im Falle, dass man sin und cos über ihre Potenzreihen definiert, folgt diese Identität leicht aus den Potenzreihendarstellungen der drei beteiligten Funktionen.

c) Ist $w \in \mathbb{C}^*$ vorgegeben, so sei $r = |w| = \sqrt{w\bar{w}}$ und $\frac{w}{r} = x + iy$. Aus $\left|\frac{w}{r}\right| = \frac{|w|}{r} = 1$ folgt $x^2 + y^2 = 1$, so dass es nach Teil a) $\phi \in [0, 2\pi)$ gibt mit $x = \cos(\phi), y = \sin(\phi)$. Da die reelle Exponentialfunktion die reellen Zahlen surjektiv auf die positiven reellen Zahlen abbildet, gibt es $\psi \in \mathbb{R}$ mit $r = \exp(\psi)$. Insgesamt folgt nach b): $exp(\psi + i\phi) = r \cdot (x + iy) = w$.

Wegen der Periodizität von sin und cos mit Periode 2π gilt $\exp(2\pi i n) = \cos(2\pi n) + i\sin(2\pi n) = 1 + i \cdot 0 = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion liefert dann $\exp(z_1 + 2\pi i n) = \exp(z_1) \cdot \exp(2\pi i n) = \exp(z_1)$.

Gilt umgekehrt $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, so impliziert die Funktionalgleichung $\exp(z_2 - z_1) = 1$ und es ist zu zeigen, dass aus $\exp(x+iy) = 1$ folgt, dass $x = 0$ und y ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Wegen der Periodizität können wir dabei voraussetzen, dass y im Intervall $[0, 2\pi)$ liegt, und müssen daraus schließen, dass $x = 0, y = 0$ gilt.

Zunächst folgt $\exp(x) \cdot (\cos(y) + i\sin(y)) = 1$. Übergang zum Absolutbetrag ergibt: $\exp(x) = 1$. Wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion folgt daraus: $x = 0$. Danach haben wir $\cos(y) + i\sin(y) = 1$ mit $y \in [0, 2\pi)$ zu lösen. Nach Teil a) folgt $y = 0$. $\square$

Aufgabe 3) Lösungsskizze: a) Für $y = 0$ gilt $f(x, 0) = 0$ nach Definition. Die Nullfunktion ist aber stetig differenzierbar, die Ableitung ist Null.
Für $y \neq 0$ ist stets $x^2 + y^2 \geq y^2 > 0$, und damit ist der Nenner ein nirgends verschwindendes Polynom in der Variablen x. Der Quotient von Polynomen ist aber stetig differenzierbar, solange der Nenner nicht verschwindet.
Aus der Quotientenregel folgt:

$$f_x(x,y) = \frac{df}{dx}(x,y) = \frac{y^3 \cdot (x^2+y^2) - xy^3 \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

b) geht genauso: das Ergebnis ist wieder $f_y(0,y) = 0 = f(0,y)$ und für $x \neq 0$:

$$f_y(x,y) = \frac{df}{dy}(x,y) = \frac{3xy^2 \cdot (x^2+y^2) - xy^3 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy^2 \cdot (3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

c) Für festes $x \neq 0$ ist die Funktion $y \mapsto f_x(x,y)$ als Quotient zweier Polynomfunktionen mit nirgends verschwindendem Nenner wieder stetig differenzierbar. Für $x = 0$ gilt $f_x(0,y) = \frac{y^5}{y^4} = y$, und zwar sowohl für $y \neq 0$ als auch für $y = 0$.

Fixiert man y, so ist die Funktion $x \mapsto f_y(x,y)$ im Fall $y \neq 0$ wiederum stetig differenzierbar. Für $y = 0$ gilt $f_y(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) Aus den Ergebnissen von c) folgt sofort, dass die Ableitung von $y \mapsto f_x(0,y) = y$ konstant (und damit auch im Nullpunkt) gleich 1 und für $x \mapsto f_y(x,0) = 0$ ist die Ableitung konstant gleich 0.
In diesem Fall kommt es bei den partiellen Ableitungen im Nullpunkt also auf die Reihenfolge an.

Aufgabe 4) Lösungshinweise: a) Die Bedingung $|a_{n+2}| \leq |a_n|$ folgt sofort, wenn wir $\left|\frac{n(n+1)-k}{(n+2)(n+1)}\right| \leq 1$ haben, was zu

$$-(n+2)(n+1) \leq n(n+1) - k \leq (n+2)(n+1)$$

äquivalent ist. Diese Ungleichungen wiederum sind zu

$$k \leq 2(n+1)^2 \quad \text{und} \quad -k \leq 2(n+1)$$

äquivalent. Für $n \geq -1 + \max\{\sqrt{\frac{|k|}{2}}, \frac{-k}{2}\}$ sind diese Ungleichungen aber erfüllt.

b) Aus Teil a) folgt, dass die Folge der Koeffizienten a_n beschränkt ist. Durch Vergleich mit der geometrischen Reihe folgt dann, dass die Potenzreihe für alle $x \in (-1,1)$ konvergiert. In diesem offenen Intervall ist dann die Grenzfunktion f sogar unendlich oft differenzierbar nach 19.3.2.
Die linke Seite der Differentialgleichung berechnet sich dann wie folgt:

$$(1-x^2) \cdot f''(x) - 2xf'(x) + k \cdot f(x)$$

$$= (1-x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} na_n \cdot x^{n-1} + k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1) + 2n - k)\, a_n \cdot x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} \cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n(n+1) - k)\, a_n \cdot x^n$$

Diese Reihe ist aber identisch 0, wenn $(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n(n+1) - k)\, a_n$ gilt, was zu der rekursiven Definition der Folge a_n äquivalent ist. Damit ist die Differentialgleichung gezeigt.

Wenn $k = m(m+1)$ mit $m \in \mathbb{N}$ gilt, dann verschwindet der Koeffizient a_{m+2}, und alle folgenden Koeffizienten mit derselben Parität sind ebenfalls 0. In diesem Fall gibt es einen eindimensionalen Unterraum im zweidimensionalen Lösungsraum der Differentialgleichung, der aus Polynomen besteht. Das sind die Vielfachen der Legendre Polynome aus Aufgabe 45 (Ana I).