Mathematisches Institut der Uni Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/ Dr. U. Weselmann

Übungen "Komplexe Mannigfaltigkeiten" WS 08/09

Blatt 8 Abgabe bis Freitag 12.12.2008 14:15

Aufgabe 18) Auf einem kompakten Torus der Form

$$X = \mathbb{C}^2/\Lambda \quad \text{mit} \quad \Lambda = \mathbb{Z}(1,0) + \mathbb{Z}(0,1) + \mathbb{Z}(\tau_1 \cdot i, 0) + \mathbb{Z}(0, \tau_2 \cdot i),$$

wobei $\tau_1, \tau_2 > 0$ bestimme man den Vektorraum der harmonischen $(1,1)$-Formen bezüglich einer Kählerform vom Typ (für $a, b > 1$):

$$\omega = i \cdot (a + \sin(\pi(z_1 + \bar{z}_1))) \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + i \cdot (b + \sin(\pi(z_2 + \bar{z}_2))) \cdot dz_2 \wedge d\bar{z}_2.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 19) (a) Für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sei

$$U_i = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \frac{df}{dz_i}(z) \neq 0 \right\},$$

$$\omega_i = (-1)^i \left(\frac{df}{dz_i} \right)^{-1} \cdot dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_{i-1} \wedge dz_{i+1} \wedge \ldots \wedge dz_n \quad \in \Omega^{n-1}(U_i)$$

für $i = 1, \ldots, n$. Sei $X_f = \{z \in \mathbb{C}^n | f(z) = 0\}$ in $\bigcup_{i=1}^n U_i$ enthalten.

(a) Zeige, dass X_f eine komplexe Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{C}^n$ ist.

(b) Man zeige die Existenz einer holomorphen $(n-1)$-Form ω auf X_f, die auf $U_i \cap X_f$ jeweils die Einschränkung von ω_i ist.

(c) Sei P ein homogenes Polynom vom Grad $n+1$ in den Variablen $X_0, \ldots, X_n$ und $X = \{(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) | P(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$. Die Eingangsvoraussetzung sei in allen affinen Koordinatenräumen

$$V_j = \{(z_0 : z_1 : \ldots : z_n) | z_j \neq 0\}$$

des $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ für die Funktion $f_j(z_1, \ldots, z_n) = P(z_1, \ldots, z_{i-1}, 1, z_i, \ldots, z_n)$ erfüllt. Zeige, dass es auf X eine von 0 verschiedene holomorphe $(n-1)$-Form ω gibt.

(6=1+2+3 Punkte)