Mathematisches Institut der Uni Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/ Dr. U. Weselmann

Übungen "Komplexe Mannigfaltigkeiten" WS 08/09

Blatt 5 Abgabe bis Freitag 21.11.2008 14:15

Aufgabe 11) (a) Zeige: Für $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und $h_{jk} \in \mathbb{C}^\infty(U)$ gehört

$$\omega = \frac{i}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} h_{jk}(z)\, dz_j \wedge d\bar{z}_k \in A^{1,1}(U)$$

genau dann zu einer hermiteschen Metrik auf U, wenn die Matrix $(h_{jk}(z))$ für alle $z \in U$ hermitesch und positiv definit ist.

(b) Zeige unter Benutzung von Aufgabe 3): Ist U ein Polyzylinder und gehört $\omega \in A^{1,1}$ mit $d\omega = 0$ zu einer hermiteschen Metrik auf U, dann ist ω in der Form $\omega = i \cdot \partial\bar{\partial}\alpha$ mit $\alpha : U \to \mathbb{R}$ darstellbar, wobei für alle $z_0 \in U, w_0 \in \mathbb{C}^n, w_0 \neq 0$ gilt: Die Funktion $\beta : (x, y) \mapsto \alpha\,(z_0 + (x + iy)w_0)$ erfüllt:

$$(*) \qquad \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}(0,0) > 0.$$

(c) Zeige: Ist $U \subset \mathbb{C}^n$ offen und erfüllt $\alpha : U \to \mathbb{R}$ für alle $z_0 \in U, w_0 \in \mathbb{C}^n, w_0 \neq 0$ die Bedingung (*) aus (b), so ist $\omega = i \cdot \partial\bar{\partial}\alpha$ die Kählerform zu einer Kählermetrik auf U.

(5 Punkte)

Aufgabe 12) Verifiziere für die folgenden Funktionen α jeweils die Voraussetzung (*) aus 11)(b) und berechne die zugehörigen Kählerformen und Kählermetriken:

(a) $U = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1\}$ und $\alpha(z) = log\,(1 - \sum_{i=1}^n |z_i|^2)$.

(b) $U = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid Im(z_i) > 0\}$ und $\alpha(z) = \sum_{i=1}^n log\,(Im(z_i))$.

(c*) $U = \{Z \in Mat_n(\mathbb{C}) \mid Z = {}^tZ,\ Im(Z) \text{ pos. def.}\}$ und $\alpha(Z) = log(det(Im(Z)))$.

(2+1+3* Punkte)