Mathematisches Institut der Uni Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/ Dr. U. Weselmann

Übungen "Komplexe Mannigfaltigkeiten" WS 08/09

Blatt 4 Abgabe bis Freitag 14.11.2008 14:15

Aufgabe 9) (a) Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d in den Variablen $X_1, \ldots, X_n$. Zeige, dass es eine Darstellung $\phi : \mathfrak{g} \to End(V)$ der Liealgebra $\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{C})$ gibt, so dass gilt:

$$\phi(E_{ij})(P) = X_i \cdot \frac{\partial P}{\partial X_j} \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq n, \ P \in V$$

mit den Elementarmatrizen $E_{ij} \in \mathfrak{g}$.

(b) Zeige, dass die Darstellung irreduzibel ist. Was ist das höchste Gewicht?

Anleitung (b): Man bestimme einen Vektor höchsten Gewichts v_m. Dann zeige man, dass jeder Untermodul $U \subset V$ mit $U \neq 0$ den Vektor v_m enthält und dass v_m den ganzen Vektorraum V erzeugt.

(4= 2+2 Punkte)

Aufgabe 10) Für einen n-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit Basis $e_1, \ldots, e_n$ bezeichne V^* den Dualraum und $e_1^*, \ldots e_n^*$ die duale Basis. Die Gruppe $G = Gl(V)$ operiert in kanonischer Weise auch auf V^*.

(a) Zeige, dass $V \otimes V^*$ zu $End(V)$ als G-Modul isomorph ist, wobei G auf $End(V)$ durch Konjugation operiert.

(b) Sei $\omega \in V \otimes V^*$ das Bild der Identität unter diesem Isomorphismus. Schreibe ω mit Hilfe der Basisvektoren e_i und e_j^*.

(c) Sei $W = V \oplus V^*$. Fasse $V \otimes V^*$ als Unterraum $A^{1,1} \subset \Lambda^2(W)$ auf. Zeige, dass für $\alpha \in A^{1,1}$ genau dann dann $\alpha \wedge \omega \wedge \ldots \wedge \omega = 0$ in $A^{n,n} = \Lambda^{2n}(W)$ gilt, wenn das Bild von α in $End(V)$ die Spur 0 hat.

(4 Punkte)