Mathematisches Institut der Uni Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/ Dr. U. Weselmann

Übungen "Komplexe Mannigfaltigkeiten" WS 08/09

Blatt 3 Abgabe bis Freitag 07.11.2008 14:15

Aufgabe 6) Für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ betrachten wir die Liealgebra der schiefsymmetrischen Matrizen

$$so_3(K) \;=\; \left\{ A \in Mat_{3\times 3}(K) \;\middle|\; A + {}^tA = 0 \right\}.$$

Konstruiere eine Basis H, L, Λ von $so_3(\mathbb{C})$, so dass die Kommutatorrelationen

$$[H, L] = -2L, \quad [H, \Lambda] = 2\Lambda, \quad [\Lambda, L] = H \qquad \text{gelten.}$$

Zeige, dass es keine derartige Basis des reellen Vektorraums $so_3(\mathbb{R})$ gibt.

(3 Punkte)

Aufgabe 7) Im Fall $d = 3$ bestimme man eine Basis von $ker(L) : A^{2,1} \to A^{3,2}$ und von $Bild(L) : A^{1,0} \to A^{2,1}$.

(2 Punkte)

Aufgabe 8) Es bezeichne V den $\mathbb{C}$-Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad n.

Bestimme Endomorphismen H, L, Λ von V, so dass die Kommutatorrelationen aus Aufgabe 6 gelten, dass die Monome X^iY^{n-i} Eigenvektoren von H sind und so dass

$$L(P) \quad = \quad Y \cdot \frac{\partial P}{\partial X} \qquad \text{für } P \in V \text{ ist.}$$

Welche Wirkung hat der Endomorphismus $C = H \circ H + 2(L \circ \Lambda + \Lambda \circ H)$?

(4 Punkte)