Mathematisches Institut der Uni Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/ Dr. U. Weselmann

Übungen "Komplexe Mannigfaltigkeiten" WS 08/09

Blatt 11 Abgabe bis Freitag 16.01.2009 14:15

Aufgabe 22) Sei $n = p + q$ und V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $e_1, \ldots, e_n$ und der symmetrischen Bilinearform

$$b(e_i, e_j) \;=\; \delta_{ij} \cdot \epsilon_i \quad \text{mit } \epsilon_1 = \ldots = \epsilon_p = 1 \text{ und } \epsilon_{p+1} = \ldots = \epsilon_n = -1.$$

Sei $Cl(p, q)$ die zugehörige Cliffordalgebra (Also der Quotient der Tensoralgebra über V modulo dem von den Relationen $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i - 2b(e_i, e_j)$ erzeugten Ideal).

(a) Zeige, dass es einen Isomorphismus $Cl(0, 2) \simeq \mathbb{H}$ gibt, wobei $\mathbb{H} = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$ die Algebra der Hamiltonschen Quaternionen ist: Eine assoziative Algebra mit 1 und den Relationen $i^2 = j^2 = -1$, $k = ij = -ji$. Berechne auch k^2, ik, ki, kj, jk in $\mathbb{H}$.

(b) Zeige, dass man durch folgende Zuordnungen einen Algebra-Isomorphismus $\phi : Cl(1, 3) \simeq M_2(\mathbb{H})$ erhält:

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 \mapsto \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}, \quad e_3 \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}, \quad e_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Auf welche Unteralgebra wird der gerade Teil der Cliffordalgebra abgebildet?

(5=2+3 Punkte)