Mathematisches Institut der Uni Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/ Dr. U. Weselmann

Übungen "Komplexe Mannigfaltigkeiten" WS 08/09

Blatt 10 Abgabe bis Freitag 09.01.2009 14:15

Aufgabe 21) (a) Fasst man den $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ als Menge der Ursprungsgeraden in $\mathbb{C}^2$ auf, so kann man definieren:

$$X \;=\; \{(P, L) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid P \in L\}.$$

Zeige: X hat eine eindeutige Struktur als komplexe Mannigfaltigkeit, so dass die erste Projektion $\pi_1 : X \to \mathbb{C}^2$ eine holomorphe Abbildung ist. Wie sehen die Fasern von π_1 aus? Zeige auch, dass die Abbildungen

$$\phi_1 : U_1 = \mathbb{C}^2 \to X, \quad (x, y) \mapsto ((x, xy), (1 : y))$$

$$\phi_2 : U_2 = \mathbb{C}^2 \to X, \quad (u, v) \mapsto ((uv, v), (u : 1))$$

eine Überdeckung von X durch zwei Karten liefern und berechne die Kartenwechselabbildung $\psi = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$.

(b) Zeige, dass jede holomorphe 1 bzw. 2 Form ω auf X von der Forum $\pi_1^*\eta$ mit einer holomorphen Form η auf $\mathbb{C}^2$ ist.

(c) Konstruiere eine geschlossene $(1, 1)$-Form auf X, die nicht von der Gestalt $\pi_1^*\eta$ mit einer $(1, 1)$-Form auf η auf $\mathbb{C}^2$ ist.

(6=2+2+2 Punkte)

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches 2009