Mathematisches Institut der Uni Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/ Dr. U. Weselmann

Übungen "Komplexe Mannigfaltigkeiten" WS 08/09

Blatt 1 Abgabe bis Freitag 24.10.2008 14:15

Aufgabe 1) Auf dem $\mathbb{C}^n$ betrachten wir die Funktion

$$f(z_1, \ldots, z_n) \;=\; \log(1 + z_1\overline{z_1} + \ldots z_n\overline{z_n}).$$

(a) Berechne die Differentialformen

$$\omega_1 = \partial f, \quad \omega_2 = \bar{\partial} f, \quad \omega_3 = \partial\bar{\partial} f.$$

Was sind $\partial\omega_3$ und $\bar{\partial}\omega_3$?

(b) Für $U = \{(z_i) \in \mathbb{C}^n | z_1 \neq 0\}$ sei $\phi : U \to U$ definiert durch

$$\phi(z_1, \ldots, z_n) = \left(\frac{1}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \ldots \frac{z_n}{z_1}\right).$$

Berechne $\phi^*\omega_3$.

(5=3+2 Punkte)

Aufgabe 2) Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ ein sternförmiges Gebiet. Zeige:

(a) Jede differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $\bar{\partial}\partial f = 0$ ist in der Form $f = g + h$ mit $\partial g = 0$ und $\bar{\partial} h = 0$ darstellbar. Die Darstellung ist bis auf eine additive Konstante eindeutig.

(b) Jede differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $\bar{\partial}\partial f = 0$ ist Realteil einer holomorphen Funktion.

(3=2+1 Punkte)