Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 9

Abgabe bis Fr 18.12.09 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 26) Sei $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \sin(t) + i\sin(2t)$ und $X = \mathbb{C} - \phi([0, 2\pi])$.

(a) Schreibe X als disjunkte Vereinigung dreier Gebiete $D_1 \cup D_2 \cup D_3$. Welche dieser Gebiete sind Elementargebiete?

(b) Berechne die Umlaufzahlen $N(\phi, z)$ für $z \in D_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

(4=1+3 Punkte)

Aufgabe 27) Bestimme für die folgenden meromorphen Funktionen $f_i : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ die Polstellen, die Polstellenordnungen und die Residuen in den Polstellen:

$$f_1(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} \qquad f_2(z) = \frac{\cos z}{(z^2+1)^2} \qquad f_3(z) = \frac{1}{\sin^3(z)}.$$

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 28) Sei $f : \mathbb{C} - \{z_1, \ldots, z_n\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion.

Man definiert: $\quad Res_\infty(f) = Res_0(\tilde{f}) \quad$ mit $\quad \tilde{f}(z) = -\frac{1}{z^2} \cdot f(\frac{1}{z}).$

(a) Zeige: Es gilt $$\sum_{j=1}^{n} Res_{z_j}(f) + Res_\infty(f) = 0.$$

(b) Zeige: Ist $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ ein Polynom vom Grad n und ist $f(z) = \frac{P'(z)}{P(z)}$, so gilt $Res_\infty(f) = -n$.

(4=3+1 Punkte)