Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 8

Abgabe bis Fr 11.12.09 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 22) (a) Bestimme die Laurententwicklungen im Ringgebiet $D = \{z \in \mathbb{C} | \ 1 < |z| < 2\}$ für die folgenden Funktionen:

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2+1}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z^2+3z+2}, \quad f_3(z) = \frac{1}{(z-2)^2}.$$

(b) Welche dieser Funktionen besitzt in D eine Stammfunktion?

(4=3+1 Punkte)

Aufgabe 23) (a) Zeige, dass

$$g(z) = \pi \cdot \cot(\pi z) = \pi \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

eine in $D = \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ holomorphe Funktion ist, und dass $g(z+1) = g(z)$ für alle $z \in D$ gilt.

(b) Zeige, dass $g(z)$ auf der Menge $A = \{z \in \mathbb{C} | \quad |Im(z)| \geq 1\}$ eine beschränkte Funktion ist.

(c) Bestimme die Art der Singularität von g sowie der Funktion f aus Aufgabe 20) im Punkt $z_0 = 0$ und für beide Funktionen den Hauptteil und den konstanten Term der Laurententwicklung in diesem Punkt.

(d) Zeige, dass $g - f$ die Nullfunktion ist.

(6= 1+1+2+2 Punkte)

Aufgabe 24) (a) Sei $f : \overline{\mathbf{H}} \to \mathbb{C}$ stetig, die Einschränkung auf $\mathbf{H}$ sei holomorph. Zeige: es gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ für alle Dreieckswege $\partial\Delta \subset \overline{\mathbf{H}}$.

(Erinnerung: $\overline{\mathbf{H}} = \{z \in \mathbb{C} | \, Im(z) \geq 0\}$ und $\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} | \, Im(z) > 0\}$

(b) Es gelte ab jetzt noch $f(r) \in \mathbb{R}$ für $r \in \mathbb{R}$. Zeige: durch

$$\tilde{f}(z) = f(z) \qquad \text{für } z \in \overline{\mathbf{H}} \text{ sowie}$$

$$\tilde{f}(z) = \overline{f(\bar{z})} \qquad \text{für } Im(z) < 0$$

wird eine in $\mathbb{C}$ stetige Funktion $\tilde{f}$ definiert, die in $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ holomorph ist.

(c) Zeige: Es gilt $\int_{\partial\Delta} \tilde{f}(z)dz = 0$ für jeden Dreiecksweg $\partial\Delta \subset \mathbb{C}$. Folgere, dass $\tilde{f}$ eine holomorphe Funktion ist.

(4=1+2+1 Punkte)

Aufgabe 25) $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(2) = 1$ und $f(\frac{1}{n}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass f im Nullpunkt eine wesentliche Singularität besitzt.

(2 Punkte)