Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 6

Abgabe bis Fr 27.11.09 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 15) Sei $D = \{z \in \mathbb{C} | z \notin \mathbb{R} \text{ oder } z < 1\}$

(a) Zeige, dass D ein Sterngebiet ist.

(b) Zeige, dass es eine Folge holomorpher Funktionen $Li_n : D \to \mathbb{C}$ gibt mit

$$Li_0(z) = \frac{z}{1-z} \qquad \text{und}$$

$$Li_n'(z) = \frac{1}{z} \cdot Li_{n-1}(z) \text{ (für } z \neq 0), \qquad Li_n(0) = 0 \text{ für } n \geq 1.$$

(c) Bestimme die Potenzreihenentwicklung von $Li_n(z)$ um den Nullpunkt.

(4=1+1+2 Punkte)

Aufgabe 16) (a) Sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass f genau dann holomorph bzw. konstant bzw. beschränkt ist, wenn $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(e^z)$ holomorph bzw. konstant bzw. beschränkt ist.

(b) Zeige: eine beschränkte holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ ist konstant.

(c) Zeige: Ist $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt $f(2z) = i \cdot f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$, so ist $f = 0$.

(5= 2+1+2 Punkte)

Aufgabe 17) (a) Zeige, dass $G = \mathbb{C} - S_1 - S_2$ smit $S_1 = \{i + r | r \in \mathbb{R}, r \geq -1\}$ und $S_2 = \{-i + r | r \in \mathbb{R}, r \leq 1\}$ ein Elementargebiet ist.

(b) Sei $G_1 \subset G_2 \subset G_3 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von Elementargebieten. Zeige, dass auch $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j$ ein Elementargebiet ist.

(c) Zeige, dass $G = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0,\ |z - i| > 1\}$ ein Elementargebiet ist. *Hinweis:* verwende (b), wobei G_j aus denjenigen Punkten von G bestehe, bei denen die Verbindungsstrecke mit einem der Punkte $3i - j$ und $3i + j$ ganz in G verläuft.

(6=2+1+3 Punkte)