Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 5

Abgabe bis Fr 20.11.09 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 12) Sei $\partial\Delta$ der von $a, b, c \in \mathbb{C}$ aufgespannte Dreiecksweg.

(a) Zeige $\int_{\partial\Delta} \frac{\bar{z}}{2i} dz \;=\; F(\Delta) \in \mathbb{R}$ mit

$$F(\Delta) = \frac{1}{4i} \left(a(\bar{c} - \bar{b}) + b(\bar{a} - \bar{c}) + c(\bar{b} - \bar{a}) \right).$$

(b) Zeige, dass $|F(\Delta)|$ der Flächeninhalt des aufgespannten Dreiecks ist. (Hinweis: wie kann man sich auf den Fall $a = 0, b \in \mathbb{R}$ reduzieren?)

(c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetig reell-differenzierbare Abbildung mit $f(0) = 0$, so dass für alle Dreieckswege $\partial\Delta$ gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \int_{\partial\Delta} \overline{f(z)}dz = F(\Delta).$$

Zeige $f(z) \;=\; -Im(z)$.

(6= 2+2+2 Punkte)

Aufgabe 13) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2e^{it}$. Berechne mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel die Integrale $I_j = \int_\gamma f_j(z)dz$ mit

$$f_1(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)^3}, \qquad f_2(z) = \frac{e^z}{z}, \qquad f_3(z) = \frac{1}{z(z+1)}.$$

(Hinweis für f_3: Partialbruchzerlegung!)

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 14) (a) Für festes $a \in \mathbb{R}$ zeige man

$$\lim_{R\to\pm\infty} \int_R^{R+ia} e^{-z^2/2} dz = 0.$$

(b) Durch Anwenden des Cauchyschen Integralsatzes auf $f(z) = e^{-z^2/2}$ und ein Rechteck mit den Eckpunkten $\pm R, ai \pm R$ folgere man daraus

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2/2} e^{-iax} dx \;=\; e^{-a^2/2} \cdot c$$

mit einer Konstanten c. (Dass diese $= \sqrt{2\pi}$ ist, soll hier nicht gezeigt werden.)

(4=2+2 Punkte)