Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 4

Abgabe bis Fr 13.11.09 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 9) Für gegebene $n \in \mathbb{N}$, $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ zeige man, dass es genau ein $2n$-tupel $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ gibt, so dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad x + iy \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^{n-j} \cdot y^j \, + \, i \cdot \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot x^{n-j} \cdot y^j$$

holomorph ist. Wie kann man das holomorphe f möglichst einfach beschreiben?

(4 Punkte)

Aufgabe 10) Seien $u, v : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. u heißt harmonisch, wenn $\Delta u = 0$ gilt, wobei $\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(a) Zeige: Wenn $f = u + iv : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann sind u und v harmonisch.

(b) Zeige: Zu jeder harmonischen Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gibt es maximal eine harmonische Funktion $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ mit $v(0) = 0$, so dass $u + iv$ holomorph ist.

(c) Welche der folgenden Funktionen sind harmonisch:

$$u_1(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \qquad u_2(x, y) = (x \cdot \cos(y) - y \cdot \sin(y)) \cdot e^x$$

$$u_3(x, y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \cos(y)$$

(d) Bestimme für die harmonischen u_j jeweils ein $v_j : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass $f_j = u_j + iv_j$ holomorph ist. Wie sieht dieses f_j aus?

(8=1+2+3+2 Punkte)

Aufgabe 11) (a) Für einen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $0 \notin \gamma([a,b])$ und ein $c \in \mathbb{C}^*$ sei

$$\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C},\ t \mapsto c \cdot \gamma(t). \text{ Zeige:}$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz.$$

(b) Für $0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$ sei $\quad \gamma : [-1,1] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto \cos(\phi) + it\sin(\phi).$ Zeige

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \;=\; 2i\phi$$

mit Hilfe der Definition des Kurvenintegrals und unter Ausnutzung der Rechenregeln für reelle Integrale.

(4=1+3 Punkte)