Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 3

Abgabe bis Fr 06.11.09 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 6) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die folgenden Reihen:

(a) $$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$$ (b) $$f_2(z) = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2niz}$$

(c) Zeige: Im Fall der Konvergenz gilt $f_2(z) = \frac{\cos(z)}{i\sin(z)}$ mit

$$\cos(z) = \frac{1}{2} \cdot (e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i} \cdot (e^{iz} - e^{-iz}).$$

(6=2+2+2 Punkte)

Aufgabe 7) (a) Zeige: für jedes $d \in \mathbb{C}^*$ gibt es $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ mit

$$(a^b)^c = a^{bc} \cdot d.$$

(b) Zeige: für jedes $d \in \mathbb{C}^*$ gibt es $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ mit

$$(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c \cdot d.$$

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 8) Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ Folgen komplexer Zahlen.

(a) Zeige: Konvergiert die Dirichletreihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

absolut für $s = s_0$, so konvergiert sie auch absolut für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $Re(s) \geq Re(s_0)$.

(b) Konvergieren die Reihen $f(s)$ und $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$ absolut für $Re(s) > r$, so konvergiert auch

$$h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \sum_{k,l \in \mathbb{N};\ kl=n} a_k \cdot b_l$$

absolut für $Re(s) > r$.

(c) Bestimme jeweils das kleinste r_0, so dass die folgenden Reihen für alle s mit $Re(s) > r_0$ absolut konvergieren ($k \in \mathbb{N}$ fest):

$$f(s) = \sum_{n=1} \frac{1}{n^s}, \qquad g_k(s) = \sum_{n=1} \frac{d_{n,k}}{n^s}$$

mit $d_{n,k} = \sum_{l \text{ teilt } n} l^k$.

(6=1+2+3 Punkte)