Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 2

Abgabe bis Fr 30.10.09 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 4) Sei $\eta : \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^2$, $z \mapsto \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$, $\infty \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für indefinites hermitesches $H = \begin{pmatrix} \alpha & u \\ \bar{u} & \beta \end{pmatrix}$ bezeichnet $K_H = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \eta(\bar{z})' \cdot H \cdot \eta(z) = 0 \right\}$ einen verallgemeinerten Kreis. Zeige:

(a) $K_{H_1} = K_{H_2}$ gilt genau dann, wenn $H_1 = \lambda \cdot H_2$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ist.

(b) Es gilt genau dann $\infty \in K_H$, wenn $\alpha = 0$ ist. In diesem Fall ist $K_H = \{\infty\} \cup \{x + iy \in \mathbb{C} | ax + by = c\}$ mit geeigneten $a, b, c \in \mathbb{R}$ eine Gerade.

(c) Es ist $\overline{K_H} = K_{\bar{H}}$. Es gilt genau dann $\overline{K_H} = K_H$, wenn entweder H reell oder wenn $H = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma \\ -i\gamma & 0 \end{pmatrix}$ mit $\gamma \in \mathbb{R}^*$ ist. Das sind genau die Kreise mit reellem Mittelpunkt, die Parallelen zur imaginären Achse sowie die reelle Achse.

(d) Je drei paarweise verschiedene Punkte in $\hat{C}$ liegen auf genau einem verallg. Kreis K_H. Auf welchem verallg. Kreis liegen die Punkte $0, 1, \infty$?

(e) Je vier paarweise verschiedene Punkte z_0, z_1, z_2, z_3 liegen genau dann auf einem verallg. Kreis K_H, wenn das Doppelverhältnis (z_0, z_1, z_2, z_3) reell ist.

(f) Haben zwei verallgemeinerte Kreise K_{H_1} und K_{H_2} genau zwei Punkte P_1 und P_2 gemeinsam, so gibt es eine Möbiustransformation M mit

$$M(K_{H_1}) = \{\infty\} \cup \{x | x \in \mathbb{R}\}, \quad M(K_{H_2}) = \{\infty\} \cup \{x \cdot e^{i\phi} | x \in \mathbb{R}\}$$

mit einem eindeutig bestimmten $\phi \in (0, \pi)$.

(g) Haben zwei verallgemeinerte Kreise K_{H_1} und K_{H_2} genau einen Punkt P gemeinsam, so gibt es eine Möbiustransformation M mit

$$M(K_{H_1}) = \{\infty\} \cup \{x | x \in \mathbb{R}\}, \quad M(K_{H_2}) = \{\infty\} \cup \{x + i | x \in \mathbb{R}\}.$$

(2+1+2+1+2+2+1 Punkte)

Aufgabe 5) (a) Zeige: Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist von der Form

$$\phi(z) = \phi_{a,b}(z) = az + b\bar{z}$$

mit eindeutig bestimmten $a, b \in \mathbb{C}$.

(b) Der Winkel $\alpha(z, w)$ zwischen zwei komplexen Zahlen $z, w \in \mathbb{C}^*$ ist definiert durch die Forderungen

$$e^{i\alpha(z,w)} = \frac{z\bar{w}}{|zw|} \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha(z, w) < 2\pi.$$

Zeige: es gilt genau dann

$$\alpha(\phi_{a,b}(z), \phi_{a,b}(w)) = \alpha(z, w) \text{ für alle } z, w \in \mathbb{C}^*,$$

wenn $b = 0$ ist.

(5=2+3 Punkte)