Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 12

Abgabe bis Fr 22.01.10 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 39) Sei $S = \{z_1, z_2, \ldots\} \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Menge von Punkten und $f : D = \mathbb{C} - S \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in den Punkten z_ν $(\nu \geq 1)$ jeweils einfache Pole mit ganzzahligen Residuen $n_\nu = Res_{z_\nu}(f)$ besitzt. Sei $z_0 \in D$ fest. Für $z \in D$ wählen wir einen glatten Weg $\gamma_z : [0,1] \to D$ mit $\gamma_z(0) = z_0, \gamma_z(1) = z$ und setzen:

$$F(z) = \exp\left(\int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta\right).$$

(a) Zeige, dass $F(z)$ nicht von der Wahl des glatten Weges γ_z abhängt.

(b) Zeige, dass F auf D eine holomorphe Funktion mit Werten in $\mathbb{C}^*$ ist.

(c) Zeige, dass sich F zu einer meromorphen Funktion $F : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ fortsetzen lässt, so dass $ord_{z_\nu}(F) = n_\nu$ für alle $\nu \geq 1$ gilt.

(6=2+1+3 Punkte)

Aufgabe 40) Sei D ein Elementargebiet, $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset D$ endlich und $f : \tilde{D} = D - S \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $Res_{z_\nu}(f) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$. Zeige, dass f in $\tilde{D}$ eine Stammfunktion besitzt.

(5 Punkte)

Aufgabe 41) Für $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph gebe es $M \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(z)| \leq M \cdot (1 + |z|^n) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zeige, dass f ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist. (Tipp: Cauchysche Integralformel für die $n+1$-te Ableitung)

(5 Punkte)