Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 11

Abgabe bis Fr 15.01.10 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 35) Berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^4 + 6t^2 + 25}\, dt.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 36) Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ eine Abbildung, so dass sowohl die Einschränkung f_1 von f auf $\mathbb{C}$ als auch die Abbildung $f_2 : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}, z \mapsto f(\frac{1}{z})$ meromorphe Funktionen (im Sinne von Anfang Kapitel 6 des Skripts) sind (dabei ist selbstverstndlich $f_2(0) = f(\infty)$). Zeige, dass f Quotient zweier Polynomfunktionen ist: $f(z) = P(z)/Q(z)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 37) Für $\omega \in \mathbf{H}$ sei $\Lambda = \{m+n\omega |\ m, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Sei $f : \mathbb{C}-\Lambda \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Periodizität $f(z + \lambda) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} - \Lambda,\ \lambda \in \Lambda$.

(a) Zeige $Res_0(f) = 0$. (Tipp: Residuensatz)

(b) f habe ab jetzt im Nullpunkt den Hauptteil $\frac{1}{z^2}$. Zeige $f(-z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} - \Lambda$.

(c) Zeige, dass es $b_2, b_4, b_6 \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$f'(z)^2 = 4f(z)^3 + b_2 f(z)^2 + b_4 f(z) + b_6 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} - \Lambda.$$

(8=3+2+3 Punkte)

Aufgabe 38) Sei $D = \mathbb{C} - \{-n | n \in \mathbb{N}\}$. Zeige, dass es eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ gibt mit $f(z+1) = \frac{1}{z} + f(z)$ für alle $z \in D$. (2 Punkte)