Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. Rainer Weissauer / Dr. Uwe Weselmann

Übungen Funktionentheorie 1 WS 09/10 Blatt 10

Abgabe bis Fr 8.01.10 um 11:00 Kästen zwischen HS 2 und HS 6

Aufgabe 29) Berechne die folgenden Integrale mit dem Residuensatz :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t^2 - 2t + 2} dt \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n} dt \quad (n \geq 1).$$

(6=3+3 Punkte)

Aufgabe 30) (a) Zeige, dass es für $k \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen B_{2k} gibt, so dass für $0 < |z| < \pi$ gilt:

$$\cot(z) \quad = \quad \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}.$$

Berechne B_2 und B_4.

(b) Zeige, dass die Funktion $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2}$ aus Aufgabe 20) für $0 < |z| < 1$ die folgende Laurententwicklung besitzt:

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{z} - 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) z^{2k-1}.$$

(c) Folgere mit Hilfe von Aufgabe 23)d):

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \quad = \quad (-1)^{k+1} \cdot \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k}.$$

Wie lauten die Formeln für $\zeta(2)$ und $\zeta(4)$?

(5=2+2+1 Punkte)

Aufgabe 31) Im folgenden wird immer über die Verbindungsstrecke integriert. Mit

$$f(z) \quad = \quad \frac{\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\cdot z^2\right)}{\exp(2\pi i z)-1} \qquad \text{für } n\in\mathbb{Z}, n\geq 1$$

zeige man:

(a) $$\lim_{R\to\infty}\int_{-\frac{1}{2}-R(1+i)}^{n-\frac{1}{2}-R(1+i)} f(z)dz = 0 \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{n-\frac{1}{2}+R(1+i)}^{-\frac{1}{2}+R(1+i)} f(z)dz = 0$$

(b) $$\int_{n-\frac{1}{2}-R(1+i)}^{n-\frac{1}{2}+R(1+i)} f(z)dz + \int_{-\frac{1}{2}+R(1+i)}^{-\frac{1}{2}-R(1+i)} f(z)dz$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}-R(1+i)}^{-\frac{1}{2}+R(1+i)} \left(\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\cdot z^2\right) + (-i)^n\cdot\exp\left(\frac{2\pi i}{n}\cdot(z+\frac{n}{2})^2\right)\right) dz,$$

und die rechte Seite hat für $R\to\infty$ den Grenzwert

$$(1+(-i)^n)\cdot\lim_{R\to\infty}\int_{-R(1+i)}^{-\frac{1}{2}+R(1+i)} \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\cdot z^2\right) dz$$

$$= (1+i)(1+(-i)^n)\sqrt{n}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi\tau^2} d\tau.$$

Welche Formel liefert nun die Anwendung des Residuensatzes?

(6=2+4 Punkte)

Aufgabe 32) Zeige, dass das Polynom

$$P(z) \quad = \quad z^{11} - 3z^6 + 1$$

6 einfache Nullstellen im Kreisring $\{z\in\mathbb{C} \mid \ 0,8 < |z| < 1\}$ und 5 einfache Nullstellen im Kreisring $\{z\in\mathbb{C} \mid \ 1 < |z| < 1,3\}$ besitzt.

(3 Punkte)

Für die Weihnachtsferien folgen noch zwei weitere Aufgaben:

Aufgabe 33) Sei $g : D = \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \ldots\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $g(1) = 1$, die der Funktionalgleichung

$$(*) \qquad g(z+1) = z \cdot g(z) \qquad \text{für alle } z \in D$$

genügt (z.B. die am 22.12. in der Vorlesung eingeführte $\Gamma-$Funktion).

(a) Zeige, dass g in den Punkten $0, -1, -2, \ldots$ einfache Pole hat und berechne die Residuen in diesen Punkten.

(b) Zeige, dass die Funktion

$$f : \tilde{D} = \mathbb{C} - \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = g(z) \cdot g(1-z)$$

die Funktionalgleichungen

$$f(z+1) = -f(z) \quad \text{und} \quad f(-z) = -f(z) \text{ für alle } z \in \tilde{D} \text{ erfüllt}$$

und zeige $Res_n f = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Zeige, dass die Funktion $s(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ alle in (b) für f angegebenen Eigenschaften besitzt und auf allen Mengen der Form $M_c = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) \geq 1, c \leq Re(z) \leq c+1\}$ beschränkt ist ($c \in \mathbb{Z}$).

(d) Zeige: ist g auf allen Mengen der Form M_c beschränkt, so gilt gleiches für f, und es folgt: $f = s$.

(e) Zeige: die Funktion $h : D \to \mathbb{C}$ mit

$$h(z) = g\left(\frac{z}{2}\right) \cdot g\left(\frac{z+1}{2}\right) \cdot 2^{z-1} \cdot g\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

erfüllt ebenfalls die Funktionalgleichung $(*)$ sowie $h(1) = 1$.

(f) Zeige: Ist g auf Mengen der Form M_c beschränkt, so gilt gleiches für h. Folgere daraus, dass $g = h$ ist.

(7=1+1+1+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 34) Mit $g(z) = \cot(\pi z)$ für $z \in D = \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ und zwei teilerfremden natürlichen Zahlen p und q definieren wir Dedekindsummen $s(p,q)$ durch die Formel

$$s(p,q) \quad = \quad \frac{1}{p} \cdot \sum_{\alpha=1}^{p-1} g\left(\frac{\alpha}{p}\right) \cdot g\left(\frac{\alpha q}{p}\right).$$

Wir betrachten die Funktion $f(z) = g(z) \cdot g(pz) \cdot g(qz)$ und wenden den Residuensatz auf diese Funktion und den Rechteckweg mit den Ecken

$$-\epsilon - iR, 1 - \epsilon - iR, 1 - \epsilon + iR, -\epsilon + iR$$

an, wobei $0 < \epsilon < min(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ und $R > 0$ sei.

(a) Berechne $res_0(f)$ mit Hilfe der Laurentwicklung $g(z) = \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi}{3} z + \ldots$.

(b) Wie hängt die Summe der übrigen Residuen im Inneren des Rechteckes mit $s(p,q) + s(q,p)$ zusammen?

(c) Zeige, dass die vertikalen Integrale (konstanter Realteil) sich zu 0 addieren und berechne mittels einer Grenzwertbetrachtung für $R \to \infty$ die horizontalen Integrale.

(d) Folgere mit Hilfe des Residuensatzes die Formel:

$$s(p,q) + s(q,p) = \frac{1}{3}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} + \frac{1}{pq}\right) - 1.$$

(8=2+2+2+2 Punkte)

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und viel Erfolg im neuen Jahr!