Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt 11,   Besprechung/Abgabe 06.07.2005

Aufgabe 28) Die 2-Sphäre sei in f geodätische Fünfecke und s geodätische Sechsecke so aufgeteilt, dass in jedem der p Eckpunkte genau 3 geodätische Segmente zusammentreffen.

a) Zeige, dass $3p = 5f + 6s$ gilt.

b) Zeige, dass $f = 12$ ist. Tip: Gauss-Bonnet.

Aufgabe 29) Sei $V = \{A \in Mat(n \times n, \mathbb{R}) | A = -{}^tA\}$ der Raum der schiefsymmetrischen Matrizen. V werde mit dem Skalarprodukt

$$(A, B) = -Spur(A \cdot B)$$

versehen.

a) Zeige, dass die durch die Exponentialreihe exp definierte Exponentialabbildung V in die $SO_n(\mathbb{R})$ abbildet. Wie kann man V mit dem Tangentialraum im Einselement identifizieren?

b) Zeige, dass es auf $SO_n(\mathbb{R})$ eine eindeutig bestimmte Riemannsche Metrik g gibt, die im Einselement mit obigem Skalarprodukt übereinstimmt und die unter Linkstranslationen mit Elementen aus $SO_n(\mathbb{R})$ invariant bleibt.

c) Stimmt exp mit der differentialgeometrischen Exponentialabbildung überein?

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt 10, Besprechung/Abgabe 29.06.2005

Ab 22.06.05 findet die Übung in Hörsaal 3, INF 288 statt

Aufgabe 25) Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und eine glatte Funktion f auf U sei $H = \{(x, f(x)|x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Graph, aufgefasst als Hyperfläche mit der vom $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Metrik. Wir transportieren diese Metrik durch Zurückziehen nach U. Bezeichnung: $\partial_i f = f_i, \partial_i \partial_j f = f_{ij}$.

a) Zeige: $g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$. sowie $\Gamma_{ij}^k = g^{kl} f_l f_{ij}$.

b) Leite für den Krümmungstensor R_{ijkl} eine möglichst einfache Formel her.

Aufgabe 26) In den Bezeichnungen von Aufgabe 25) berechne man die Schnittkrümmung im Fall $U = \mathbb{R}^2$ für

a) die Sattelfläche $f(x, y) = xy$;
b) die Affensattelfläche $f(x, y) = x \cdot (x^2 - 3y^2)$.

Aufgabe 27) Die dreidimensionalen Darstellungen der S_4:
Sei $E = \{\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ die Menge der 8 Eckpunkte eines Würfels im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeige, dass $G_1 = \{\phi \in SO_3(\mathbb{R})|\phi(E) = E\}$ eine zu S_4 isomorphe Gruppe ist. Hinweis: Betrachte die Wirkung auf die 4 Raumdiagonalen des Würfels. Beschreibe die Elemente von G_1 geometrisch entsprechend den 5 verschiedenen Typen von Elementen in S_4. Durch den Mophismus

$$\iota_1 : S_4 \simeq G_1 \subset GL_3(\mathbb{R})$$

erhalten wir eine dreidimensionale Darstellung von S_4.

b) Konstruiere eine weitere Injektion $\iota_2 : S_4 \hookrightarrow \{\phi \in O_3(\mathbb{R})|\phi(E) = E\}$, so dass die Darstellungen ι_1 und ι_2 nicht isomorph sind.

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt 9, Besprechung/Abgabe 22.06.2005

Ab 22.06.05 findet die Übung in Hörsaal 3, INF 288 statt

Aufgabe 23) Bestimme die Innenwinkel und den Flächeninhalt der durch folgende Punkte aufgespannten geodätischen Dreiecke (teilweise ausgeartet!) in der oberen Halbebene $\mathcal{H}$: Dabei gehen die zur y-Achse parallelen Geodäten durch den Punkt ∞, die Winkel in Punkten auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sind per definitionem gleich 0 gesetzt.

a) $z_1 = \rho = exp(2\pi i/6), z_2 = \rho^2, z_3 = \infty$.
b) $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$.
c) $z_1 = i, z_2 = 2i, z_3 = \rho$.

Aufgabe 24) Man gebe eine Möbiustransformation ϕ an, die die obere Halbebene $\mathcal{H}$ auf das Innere des Einheitskreises

$$\mathcal{E} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

abbildet. Bestimme die Metrik $g_{\mathcal{E}}$ auf $\mathcal{E}$, so dass ϕ eine Isometrie ist. Beschreibe die Geodätischen bezüglich der Metrik $g_{\mathcal{E}}$?

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt 8, Besprechung/Abgabe 15.06.2005

Aufgabe 21) Für $\dim(V) = n$ bestimme man die Dimensionen der Vektorräume $S^4(V)$, $D^{3,1}(V)$, $R^{2,2}(V)$, $D^{2,1,1}(V)$ und $\Lambda^4(V)$.
Was ergibt sich für $n = 2, 3, 4$?

Aufgabe 22) (Zur Darstellung σ_2).
Sei S_n die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Zeige, dass es eine irreduzible Darstellung $\sigma : S_3 \to GL_2(\mathbb{R})$ der S_3 gibt, so dass $\sigma(S_3)$ aus den Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks besteht.

b) $\iota : S_3 \hookrightarrow S_4$ sei die kanonische Injektion, die jeder Permutation $\phi \in S_3$ die durch $\phi(4) = 4$ fortgesetzte Permutation zuordnet. Zeige, dass es einen Homomorphismus $\tau : S_4 \to S_3$ gibt, so dass $\tau \circ \iota = id$ gilt und so dass $\ker(\tau) = K$ ist mit der Kleinschen Vierergruppe $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

c) Zeige, dass $\sigma \circ \tau : S_4 \to GL_2(\mathbb{R})$ mit der Darstellung σ_2 aus der Vorlesung übereinstimmt. Für später: Interpretiere die erste Bianchi-Identität und weitere Aussagen aus der Vorlesung mit Hilfe dieser Darstellung.

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt 7, Besprechung/Abgabe 08.06.2005

ACHTUNG: Am 08.06.05 findet die Übung in Hörsaal 2, INF 288 statt

Aufgabe $\tilde{19}$) a) Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\phi : M \to M$ eine Isometrie. Für ein $s > 0$ sei $\gamma : (-s, s) \to M$ eine Geodätische und $p = \gamma(0) \in M, v = \gamma'(0) \in T_pM$. Zeige: Falls $\phi(p) = p$ und $d\phi(v) = v$ gilt, so ist $\phi(\gamma(t)) = \gamma(t)$ für alle $t > 0$.

b) Für die obere Halbebene $\mathcal{H}$ (immer versehen mit der hyperbolischen Metrik (Aufgabe 19)) konstruiere man für jeden Halbkreis S mit Mittelpunkt auf der reellen Achse eine Isometrie $\phi : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, die genau S als Fixpunktmenge hat.

c) Bestimme alle Geodätischen auf der 2-Sphäre (Aufgabe 8) und auf der oberen Halbebene.

Aufgabe 20) a) Für $a > 0$ sei ψ eine glatte Funktion $\psi : [0, a) \to [0, 1]$ mit $\psi(0) = 0$ und $\psi'(0) = 1$. Betrachte die Abbildung:

$$\Phi : D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < a^2\} \quad \to \quad S^2,$$

$$(0,0) \neq (x, y) \mapsto \left(x \cdot \psi(r)/r, y \cdot \psi(r)/r, \sqrt{1 - \psi(r)^2}\right), \quad (0,0) \mapsto (0,0,1)$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Betrache die Standardmetrik g auf S^2. Zeige, dass Φ glatt ist.
b) Wie muss ψ aussehen, damit $\Phi^* g$ zur euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^2$ konform äquivalent ist?
c) Welche Bedingung muss ψ erfüllen, damit Φ ein formales Normalkoordinatensystem um 0 ist? Bestimme dieses ψ explizit.
d) Welche Bedingung muss ψ erfüllen, damit Φ ein geodätisches Normalkoordinatensystem um 0 ist?

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt 6, Besprechung/Abgabe 01.06.2005

Aufgabe 17) $M \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und konvex und trage eine Riemannsche Metrik. Seien $\gamma_1 : [-1, 0] \to M$ und $\gamma_2 : [0, 1] \to M$ zwei glatte Kurven mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Sei $\phi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ eine glatte Funktion mit $\phi(t) = 1$ für $t \leq -1$ und $\phi(t) = 0$ für $t \geq 1$. Für $k > 0$ betrachte man die Kurve

$$\gamma^k : [-1, 1] \to M, \quad t \mapsto \phi(t \cdot k) \cdot \gamma_1(t) + (1 - \phi(t \cdot k)) \cdot \gamma_2(t).$$

Zeige, dass γ^k glatt ist, und dass

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{L}(\gamma^k) \quad = \quad \mathbf{L}(\gamma_1) + \mathbf{L}(\gamma_2).$$

Folgere daraus, dass es bei der Definition der Kurvenlänge genügt, glatte Kurven zu betrachten.

Aufgabe 18) a) Zwei Metriken g_1 und g_2 auf einer Mannigfaltigkeit M heißen *konform äquivalent*, wenn es eine skalare Funktion $\phi : M \to \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $g_2 = \phi \cdot g_1$. Begründe, warum die Winkel zwischen Vektoren im Tangentialraum eines Punktes invariant bleiben, wenn man zu einer konform äquivalenten Metrik übergeht.

b) In jedem Punkt x einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit M sei ein Endomorphismus J_x des Tangentialraums T_xM gegeben mit $J_x \circ J_x = -Id$. Zeige, dass es bis auf konforme Äquivalenz nur maximal eine mit den J_x kompatible Riemannsche Metrik g auf M geben kann in dem Sinne, dass $g(v_1, v_2) = g(J_xv_1, J_xv_2)$ für $v_1, v_2 \in T_xM$ gilt.

c) Wir versehen $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Standardmetrik g_0 , identifizieren die Tangentialräume mit $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und betrachten in allen Punkten den Endomorphismus J_x, der aus der Multiplikation mit i besteht. Zeige, dass J_x mit g_0 kompatibel ist. Für

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

betrachten wir die Möbiustransformation

$$T_h : \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

Zeige, dass die Ableitung von T_h mit den J_x vertauscht und folgere daraus, dass die Metriken g_0 und $T_h^* g_0$ konform äquivalent sind.

Aufgabe 19) a) In der Notation von Aufgabe 18 zeige man, dass für $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ die Abbildung T_h die obere Halbebene

$$\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$$

in sich überführt und die hyperbolische Metrik

$$g_1 := y^{-2} \cdot g_0$$

auf $\mathcal{H}$ invariant lässt: $T_h^* g_1 = g_1$.

b) Zeige, dass $\gamma : \mathbb{R} \to H, t \mapsto i \cdot e^t$ eine Geodätische bezüglich der hyperbolischen Metrik g_1 definiert.

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt 5, Besprechung/Abgabe 25.05.2005

Aufgabe 15) a) Für ganze Zahlen $a \geq b$ bestimme man sämtliche Gewichte der irreduziblen Darstellung $\rho_{a,b}$ von $GL_2(\mathbb{R})$ mit Höchstgewicht (a, b). Was ist $\dim(\rho_{a,b})$?

b) Welche Gewichte treten für $c \geq d$ in dem Tensorprodukt $\rho = \rho_{a,b} \otimes \rho_{c,d}$ auf? Was sind die Multiplizitäten? Bestimme die Höchstgewichte aller irreduziblen Darstellungen von $GL_2(\mathbb{R})$, die in der Zerlegung von ρ in irreduzible Darstellungen auftreten. Mit welcher Multiplizität treten diese Darstellungen auf?

Aufgabe 16) Die Spin-Überlagerung von $SO(3)$ und $SO(3,1)$:
a) Sei V der $\mathbb{R}-$Vektorraum der hermiteschen 2×2-Matrizen. Was ist $\dim_{\mathbb{R}}(V)$? Zeige, dass für $A \in GL_2(\mathbb{C})$ die Abbildung $\rho(A) : B \mapsto A \cdot B \cdot {}^t\bar{A}$ den Raum V in sich überführt. Wir erhalten eine Darstellung: $\rho : GL_2(\mathbb{C}) \to GL(V)$.

b) Zeige, dass durch $b(B_1, B_2) = \det(B_1 + B_2) - \det(B_1) - \det(B_2)$ eine symmetrische Bilinearform auf V definiert wird. Was ist ihre Signatur? Zeige, dass die Einschränkung von ρ einen Homomorphismus ρ_1 von $SL_2(\mathbb{C})$ in die orthogonale Gruppe $O(V, b)$ zu dieser Form definiert. Bestimme den Kern und das Bild von ρ_1.

c) Zeige, dass die Untergruppe $SU_2 = \{A \in SL_2(\mathbb{C}) | A \cdot {}^t\bar{A} = id\}$ den Unterraum $V_0 = \{B \in V | tr(B) = 0\}$ in sich überführt. Was ist die Signatur der Einschränkung von b auf V_0? Bestimmte Bild und Kern des durch Einschränkung von ρ_1 gewonnenen Homomorphismus $\rho_2 : SU_2 \to O(V_0, b)$.

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt 4, Besprechung/Abgabe 18.05.2005

Aufgabe 12) Für einen n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V betrachten wir die Darstellung von $G = GL(V)$ auf $W = V \otimes V$.

a) Zeige: Die Vektoren der Form $v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1$ (bzw. $v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1$) erzeugen einen G-invarianten Teilraum S^2V (bzw. $\Lambda^2 V$). Zeige: Es gilt $V \otimes V = S^2V \oplus \Lambda^2 V$. Berechne die Dimensionen von S^2V und $\Lambda^2 V$.

b) Nach Einführung einer Basis kann man V mit dem $\mathbb{R}^n$ und G mit $GL_n(\mathbb{R})$ identifizieren. Zeige, dass die Darstellung ρ auf W zu der Darstellung $\tilde{\rho}$ von $GL_n(\mathbb{R})$ auf $Mat(n, \mathbb{R})$ isomorph ist, wobei $\tilde{\rho}(g)(A) = gAg'$ gilt. Beschreibe die Bilder von S^2V und $\Lambda^2 V$ unter diesem Isomophismus.

c) Zeige, dass $\Lambda^2 V$ und S^2V irreduzible algebraische Darstellungen von G sind und bestimme die Gewichte, das höchste Gewicht sowie den Eigenwert des Casimiroperators.

Aufgabe 13) Für einen n-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V betrachten wir die Darstellung ρ von $G = GL(V)$ auf $W = End(V)$ durch $\rho(g)(f) = g \circ f \circ g^{-1}$.

a) Zeige: $End^0(V) = \{f \in End(V) | tr(f) = 0\}$ und $Z = \{a \cdot Id_V | a \in \mathbb{R}\}$ sind G-invarianten Teilräume. Es gilt $End(V) = End^0(V) \oplus Z$. Was sind die Dimensionen von $End^0(V)$ und Z?

b) Zeige, dass $End^0(V)$ und Z irreduzible algebraische Darstellungen von G sind und bestimme die Gewichte, das höchste Gewicht sowie den Eigenwert des Casimiroperators.

c) Für $n = 2$ berechne man nach Einführung von Basen in V bzw. $End^0(V)$ explizit die Matrizen, die $\rho(g)$ für $g \in GL_2(\mathbb{R})$ beschreiben.

Aufgabe 14) Mit det bezeichnen wir die eindimensionale Darstellung von $GL(V)$ durch die Determinante. In den Notationen von Aufgabe 12 und 13 zeige man:

a) Für $n = 2$ ist S^2V zu $End^0(V) \otimes det$ als Darstellung von $GL(V)$ isomorph.

b) Für $n = 3$ ist $\Lambda^2 V$ zu $V^* \otimes det$ als Darstellung von $GL(V)$ isomorph.

c) Für $n = 4$ ist $W = \Lambda^2 V$ zu $W^* \otimes det$ als Darstellung von $GL(V)$ isomorph.

Dabei benutze man sowohl die Ergebnisse der Aufgaben 12) und 13) sowie die Sätze aus der Vorlesung, um die Existenz eines Isomorphismus abstrakt zu zeigen, konstruiere aber andererseits auch immer einen expliziten Isomorphismus.

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt 3, Besprechung/Abgabe 11.05.2005

Aufgabe 10) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion mit

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; f.$$

Beweise, dass f linear ist: $f(x, y) = ax + by$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Hinweise:
1. Reduktion auf die Behauptung $f \equiv 0$ falls $\partial_x f(0, 0) = \partial_y f(0, 0) = 0$.
2. Welche Differentialgleichung erfüllt die Funktion

$$g(r, \phi) = f(r \cdot \cos\phi, r \cdot \sin\phi)?$$

Aufgabe 11) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \in GL(V)$. Sei $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ und $\pi : \mathbb{R} \to X$ die kanonische Projektion. Auf $\mathbb{R} \times V$ wird durch $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{Z}$ mit $x_2 = x_1 + n$ und $v_2 = A^n v_1$ eine Äquivalenzrelation definiert. Definiere auf dem Quotienten $W = \mathbb{R} \times V/\sim$ die Struktur eines Vektorbündels über X. Sei $\pi_W : \mathbb{R} \times V \to W$ die kanonische Projektion. Zeige, dass es einen Zusammenhang ∇_W auf W gibt, so dass $\pi_W^* \nabla_W$ der kanonische Zusammenhang $d \otimes id_V$ auf $\mathbb{R} \times V$ ist.

Zeige, dass jedes Vektorbündel $\tilde{W}$ über dem Raum X zu einem Bündel W isomorph ist und dass jedes Vektorbündel über X mit Zusammenhang zu einem Paar (W, ∇_W) isomorph ist.

Im Fall $V = \mathbb{R}, A = -1$ ist W ein Möbiusband. Man zeige, dass jeder stetige Schnitt $\sigma : X \to W$ dann eine Nullstelle hat.

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Differentialgeometrie SS 2005

Blatt2, Besprechung/Abgabe ab 04.05.2003

Aufgabe 7) Beschreibe auf dem $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Standardmetrik g alle Zusammenhänge ∇, welche metrisch bezüglich g (aber nicht notwendig torsionsfrei) sind mittels ihrer Christoffelsymbole.

Aufgabe 8) Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die 2-Sphäre und $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ die Inklusionsabbildung. Beschreibe S^2 als Mannigfaltigkeit! Ausgehend von der Standardmetrik g auf $\mathbb{R}^3$ betrachte man die zurückgezogene Metrik $i^*(g)$ auf S^2 und den zugehörigen Levi-Civita-Zusammenhang ∇' und vergleiche diesen mit dem Pullback $i^*(\nabla)$ des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ auf $\mathbb{R}^3$. Berechne den Krümmungstensor von ∇'.

Aufgabe 9)

a) Zeige, dass die Exponentialabbildung : $exp : End(V) \to GL(V)$ für endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorräume surjektiv ist.

b) Welche reellen 2×2 Matrizen A mit charakteristischem Polynom χ_A liegen im Bild der reellen Exponentialabbildung $exp : Mat(2 \times 2, \mathbb{R}) \to GL(2, \mathbb{R})$:

b1) χ_A zerfällt nicht in Linearfaktoren;

b2) $\chi_A(X) = (X - a) \cdot (X - b)$ mit $a, b > 0$;

b3) $\chi_A(X) = (X - a) \cdot (X - b)$ mit $a < 0$ oder $b < 0$ sowie $a \neq b$;

b4) A ist eine Skalarmatrix;

b5) $\chi_A(X) = (X - a)^2$ mit $a > 0$;

b6) $\chi_A(X) = (X - a)^2$ mit $a < 0$ und A ist nicht skalar.