Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 9 Abgabe bis zum 13.01.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie: erstens 32 oder 33, zweitens 34 oder 35, drittens 36, viertens 37 oder 38

Aufgabe 32) Die Konstruktion der reellen Zahlen: Vollständigkeit

Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. F bezeichne den Körper der Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen mit der Anordnung aus Aufgabe 23. $(A_n)_{n\geq 0}$ sei eine Cauchyfolge von Elementen $A_n \in F$. Es gelte $A_n = [(a^n_m)_{m\geq 0}]$ für geeignete Cauchyfolgen $(a^n_m)_{m\geq 0}$ mit $a^n_m \in K$.

(a) Zeigen Sie: Ist $(A_n)_{n\geq 0}$ eine geometrisch abklingende Cauchyfolge (siehe Aufgabe 20 (c)) in F und sind alle Folgen $(a^n_m)_{m\geq 0}$ geometrisch abklingende Cauchyfolgen in K, so ist die Diagonalfolge $A = (a^m_m)_{m\geq 0}$ ebenfalls eine Cauchyfolge, und es gilt $A = \lim_{n\to\infty} A_n$.

(b) Beweisen Sie, dass der archimedisch angeordnete Körper F vollständig ist.

(6 Punkte=4+2)

Aufgabe 33) Sei K ein beliebiger angeordneter Körper (nicht notwendig archimedisch).

(a) Zeigen Sie, dass

$$R = \{a \in K \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } |a| \leq n\}$$

unter den von K induzierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist und sämtliche Körperaxiome bis auf das Axiom $(K3')$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$I \quad = \quad \left\{ a \in K \;\middle|\; \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \text{ gilt } |a| \leq \frac{1}{n} \right\}$$

die Axiome (I1), (I2) und (I3) aus Aufgabe 16 erfüllt.

(c) In den Notationen aus Aufgabe 16 zeige man, dass durch

$$[a] \in P \quad \Longleftrightarrow \quad a > 0 \text{ und } a \notin I$$

eine Menge positiver Zahlen $P \subset F$ wohldefiniert ist, die den Axiomen (P1), (P2), (P3) aus Aufgabe 6) genügt.

(d) Zeigen Sie, dass der Körper F mit der Anordnung aus Teil (c) das archimedische Axiom erfüllt.

(6 Punkte= 2+1+2+1)

Aufgabe 34) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Das Bild $f([a, b])$ ist ebenfalls ein Intervall der Form $[c, d]$ mit $c, d \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie: ist f zusätzlich streng monoton wachsend, so ist f eine bijektive Abbildung von $[a, b]$ nach $[f(a), f(b)]$ und die Umkehrabbildung $g = f^{-1}$ ist ebenfalls stetig.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\sqrt{} \;:\quad [0, \infty) \to [0, \infty), \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

stetig ist.

(4 Punkte=1+2+1)

Aufgabe 35) Zeigen Sie: jede Polynomfunktion der Form

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{i=0}^{2n+1} a_i \cdot x^i \qquad \text{mit } a_i \in \mathbb{R}, \quad a_{2n+1} \neq 0$$

hat mindestens eine reelle Nullstelle. (4 Punkte)

Aufgabe 36) Untersuchen Sie mit Beweis, ob die folgendermaßen definierten Funktionen $f_i; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig sind: (zu $tanh$ siehe Aufgabe 31)

$$f_1(x) = x, \qquad f_2(x) = x^2, \qquad f_3(x) = tanh(x).$$

(3 Punkte=1+1+1)

Aufgabe 37) Zeigen Sie: Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige, beschränkte und monoton steigende Funktion, so ist f gleichmäßig stetig.

(4 Punkte)

Aufgabe 38) Sei $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$, aufgefasst als Teilraum des metrischen Raumes $\mathbb{R}$. Sei Y ein beliebiger metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ in Y genau dann eine Cauchyfolge ist, wenn die Abbildung

$$f : \quad X \to Y, \qquad \frac{1}{n} \quad \mapsto \quad a_n$$

gleichmäßig stetig ist.

(4 Punkte=1+3)

Wir wünschen allen Hörern der Vorlesung Analysis I ein frohes Weihnachtsfest und ein erfolgreiches Jahr 2006!