Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 8 Abgabe bis zum Mittwoch 21.12.2005 um 09:00 Uhr

Bearbeiten Sie alle Aufgaben:

Aufgabe 29) Für positive rationale Zahlen $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 > b$ betrachten wir das Intervall $X = [\sqrt{b}, a]$ und die Menge $Y = X \cap \mathbb{Q}$ als Teilräume des metrischen Raumes $\mathbb{R}$. Dabei sei b kein Quadrat einer rationalen Zahl. Sei

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{b}{x} \right)$$

Zeigen Sie, dass f sowohl X als auch Y in sich abbildet und dass es eine Konstante $0 < \kappa < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) < \kappa \cdot d(x, y) \qquad \text{für alle } x, y \in X.$$

Bestimmen Sie die Menge der Fixpunkte von f in X und in Y.

(4 Punkte)

Aufgabe 30) Wir definieren Abbildungen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch :

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x(i) - y(i)| \qquad d_H(x, y) = \#\{i \mid x(i) \neq y(i)\}$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x(i) - y(i)| \qquad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x(i) - y(i)|^2}$$

Dabei sei $x = (x(i))_{1 \le i \le n}$, $y = (y(i))_{1 \le i \le n}$.

(a) Zeigen Sie, dass für d_∞ und für d_1 die Dreiecksungleichung gilt. *Bemerkung: auch die anderen Axiome eines metrischen Raumes sind erfüllt.*

(b) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$d_\infty(x,y) \;\leq\; d_2(x,y) \;\leq\; d_1(x,y) \;\leq\; n \cdot d_\infty(x,y)$$

(c) Zeigen Sie entweder für $? = 1$ oder für $? = \infty$:

Eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ konvergiert genau dann bezüglich d_2 gegen x, wenn x_n bezüglich $d_?$ gegen x konvergiert. (*Bemerkung*: Man sagt dann, die Metrik $d_?$ ist zur euklidischen Metrik d_2 äquivalent.)

(d) Konstruieren Sie eine Folge (x_n) im $\mathbb{R}^n$, die bezüglich d_2 gegen 0 konvergiert, aber bezüglich der Hamming-Metrik d_H keine Nullfolge ist.

(d) Zeigen Sie, dass Quader der Form $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ folgenkompakt sind.

(6 Punkte =1+1+1+1+2)

Aufgabe 31) Die Funktionen *cosh* (cosinus hyperbolicus), *sinh* (sinus hyperbolicus) und *tanh* (tangens hyperbolicus) sind für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$cosh(x) = \frac{exp(x) + exp(-x)}{2} \qquad\qquad sinh(x) = \frac{exp(x) - exp(-x)}{2}$$

$$tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}.$$

Beweisen Sie in jeder Teilaufgabe eine der angegebenen Gleichungen:

(a) $cosh(x)^2 - sinh(x)^2 = 1$ oder $cosh(x)^2 + sinh(x)^2 = cosh(2x)$.

(b) $cosh(x+y) = cosh(x) \cdot cosh(y) + sinh(x) \cdot sinh(y)$ oder

$$sinh(x+y) = sinh(x) \cdot cosh(y) + cosh(x) \cdot sinh(y).$$

(c) $cosh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ oder $sinh(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(d) $tanh(x) - tanh(y) = \dfrac{sinh(x-y)}{cosh(x) \cdot cosh(y)}$ oder

$$tanh(x+y) = \frac{tanh(x) + tanh(y)}{1 + tanh(x) \cdot tanh(y)}.$$

(4 Punkte)