Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 7 Abgabe bis zum 09.12.2005 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie entweder Aufgaben 24) bis 27) oder 24),25) und 28):

Aufgabe 24) Zeigen Sie:

(a) Für alle $x > 0$ gilt: $\exp(x) > 1$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\exp(x) > 0$.

(c) Die Funktion exp ist streng monoton wachsend:

$$\text{aus} \quad x < y \quad \text{folgt} \quad \exp(x) < \exp(y).$$

(3 Punkte=1+1+1)

Aufgabe 25) Welche der Folgen konvergieren?

$$a_n = \frac{e^n}{n!} \qquad\qquad b_n = n! \cdot e^{-n^2}$$

Begründen Sie Ihr Ergebnis und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(3 Punkte = 1+2)

Aufgabe 26) (a) Was ist das Cauchyprodukt der geometrischen Folge $(q^n)_{n\geq 0}$ mit sich selber?

(b) Zeigen Sie: Für $|q| < 1$ gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \cdot q^n \quad = \quad \frac{1}{(1-q)^2}$$

(2 Punkte)

Aufgabe 27) Für die Menge $\mathbb{N}_\infty := (\mathbb{N}\backslash\{0\}) \cup \{\infty\} = \{\infty, 1, 2, 3, \ldots\}$ wird eine Abbildung $d : \mathbb{N}_\infty \times \mathbb{N}_\infty \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$d(n,m) = \frac{|n-m|}{nm} \qquad \text{für } n \neq \infty \neq m$$

$$d(n,\infty) = d(\infty,n) = \frac{1}{n} \qquad \text{für } n \neq \infty, \qquad d(\infty,\infty) = 0$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 28) Zeigen Sie:

(a) Mit $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$:

$$\left| s_n(-x) - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right| \quad \leq \left| s_n(x) - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right|$$

(b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gilt:

$$lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{a}{n^2} - \frac{b}{n^3}\right)^n \quad = \quad 1.$$

Tipp: Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung.

(d) Folgern Sie aus (c): Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x+y}{n}\right)^n = 1.$$

(e) Geben Sie mit Hilfe von (b) und (d) einen neuen, von den Abschnitten 9.4./9.5 der Vorlesung unabhängigen Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

(8 Punkte = 1+1+3+2+1)