Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006 Blatt 6

Abgabe (alle drei Aufgaben!) bis zum 02.12.2005 um 11:00 Uhr

Aufgabe 21) Sei $(y_n)_{n\geq 0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen, so dass

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} \qquad \text{existiert.}$$

(a) Zeigen Sie eine der beiden folgenden Aussagen:

(a1) Wenn $q < 1$ gilt, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

(a2) Wenn $q > 1$ gilt, so divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

(b) Untersuchen Sie drei der folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz und bestimmen Sie jeweils das oben definierte q:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1,005^n}{n^{2005}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+(-1)^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

(5 Punkte = 2+3)

Aufgabe 22) Die alternierende harmonischen Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \qquad \text{mit} \qquad a_m = \frac{(-1)^m}{m+1} \qquad \text{soll umgeordnet werden.}$$

Bearbeiten Sie entweder (a) und (b) oder aber (c) und (d):

(a) Sei $M \in \mathbb{N}$ mit $M \geq 2$ gegeben. Zeigen Sie, dass die folgendermaßen definierte Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist:

$$\begin{aligned} \tau(n \cdot M + k) &= 2\,((M-1)n + k) && \text{für } n \geq 0,\ 0 \leq k \leq M-2 \\ \tau(n \cdot M + M - 1) &= 2n+1 && \text{für } n \geq 0. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass die umgeordnete alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ konvergiert und dass für den Grenzwert σ_M folgende Abschätzung gilt:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2M-3}\right)-\frac{1}{2} \quad < \quad \sigma_M \quad < \quad 1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2M-3}$$

(c) Zeigen Sie, dass durch folgende Gleichungen eine bijektive Abbildung $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert wird:

$$\rho\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}+k\right) \quad = \quad 2\left(\frac{n\cdot(n-1)}{2}+k-1\right) \qquad \text{für } n \geq 1,\ 0 < k \leq n$$

$$\rho\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right) \quad = \quad 2n+1 \qquad \text{für } n \geq 0.$$

(d) Zeigen Sie, dass die umgeordnete Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\rho(n)}$ divergiert.

(5 Punkte: (a)1, (b)4 oder (c)2, (d)3)

Aufgabe 23) Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Eine Cauchyfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heiße positiv, wenn es $k > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n \geq k$ für alle $n \geq N$. Wir benutzen die Bezeichnungen von Aufgabe 16.

(a) Zeige Sie: Ist die Cauchyfolge (b_n) zur positiven Cauchyfolge (a_n) äquivalent, so ist auch (b_n) positiv.

(b) In der Menge F der Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen ist deshalb eine Teilmenge P (wohl-)definiert durch:

$$[(a_n)] \in P \quad \Leftrightarrow \quad (a_n) \text{ ist eine positive Cauchyfolge.}$$

Zeigen Sie: P genügt den Axiomen (P1), (P2), (P3) aus Aufgabe 6.

(c) Wir versehen den Körper F mit der durch die Teilmenge P festgelegten Anordnung (Aufgabe 6). Zeigen Sie, dass diese Anordnung archimedisch ist.

(6 Punkte = 2+2+2)