Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 13   Abgabe bis Donnerstag 01.02.2007 um 11:00 Uhr

Aufgabe 50) Zeige, dass die folgenden Funktionen messbar sind:

(a) Jede Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ für jedes Daniell-Integral $I : C_c(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ x^3 \cdot i & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

bezüglich des Riemann-Integrals (Kapitel 25 im Skript).

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 51) Beweise die Behauptung am Ende von Kapitel 28.6.:

$p : H \to B$ ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung und hat die Eigenschaft

$$\langle p(v), w \rangle = \langle v, p(w) \rangle.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 52) (a) Auf $U \subset \mathbb{R}^2$ offen sei eine Riemannsche Metrik der Form

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) & 0 \\ 0 & g_2(x,y) \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne für $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ die Wirkung des Laplaceoperators $\Delta(f)$.

Was ergibt sich im Spezialfall $g = k^*(g_E)$ der Aufgabe 49)?

Was ergibt sich im Spezialfall der Poincaré-Metrik (Aufgabe 48)?

(4 Punkte)

Aufgabe 53) Seien $B_n(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ die Bernoullipolynome (Kapitel 17) und $B_n = B_n(0)$ die Bernoullizahlen.

(a) Zeige für $m, n \geq 1$:

$$\int_0^1 B_n(x) \cdot B_m(x)\, dx \quad = \quad (-1)^{n-1} \cdot B_{n+m} \cdot \frac{n! \cdot m!}{(n+m)!}.$$

(b) Für $n \geq 1$ und $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$a_{n,k} = \int_0^1 B_n(x) \cdot e^{2\pi i k x} dx.$$

Zeige $a_{n,0} = 0$ und:

$$a_{n,k} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n!}{(2\pi i k)^n} \qquad \text{für } k \neq 0.$$

(c) Zeige für $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \quad = \quad \frac{(-1)^{n-1} \cdot B_{2n} \cdot \pi^{2n} \cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Welche Formeln ergeben sich für $n = 1, 2, 3, 4, 5$?

(7=2+2+3 Punkte)