Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

# Übungen zur Analysis III WS 2006/07

**Blatt 12 Abgabe bis Donnerstag 25.01.2007 um 11:00 Uhr**

Bearbeiten Sie vier der fünf Aufgaben!

**Aufgabe 45)** (a) In den Bezeichnungen der Aufgabe 39 zeige man, dass durch

$$\pi : S^{n-1} \to M, \quad (b_1, \ldots, b_n) \mapsto A = (b_\mu \cdot b_\nu)_{1 \leq \mu,\nu \leq n}$$

eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten definiert wird.

(d) Zeige, dass $\pi$ surjektiv ist, und dass genau dann $\pi(b) = \pi(c)$ gilt, wenn $c = \pm b$ ist.

(4=2+2 Punkte)

**Aufgabe 46)** Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ sowie $0 \leq i \leq n$ und $I = \{1, 2, \ldots, i\}$ zeige man:

$$\triangle(f \cdot dx_I) = (-1)^n \cdot \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{dx_j^2} \right) \cdot dx_I,$$

wobei der Laplaceoperator $\triangle = d \circ \delta + \delta \circ d$ bezüglich der euklidischen Metrik gebildet wird. Dabei wird die Koableitung gegeben durch

$$\delta = (-1)^{i(n-i+1)} \; * \; d * \; : A^i(\mathbb{R}^n) \to A^{i-1}(\mathbb{R}^n).$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 47)** (a) Auf $U = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2$ für zwei offene Intervalle $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ sei eine Riemannsche Metrik der Form

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} h(x,y) & 0 \\ 0 & k(y) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } h \in \mathcal{C}^\infty(U),\ k \in \mathcal{C}^\infty(I_2)$$

gegeben ($h$ und $k$ strikt positiv). Seien $x_0 \in I_1$ und $y_0, y_1 \in I_2$ gegeben. Zeige, dass für jeden Weg $\phi : [0,1] \to U$ mit $\phi(0) = (x_0, y_0)$ und $\phi(1) = (x_0, y_1)$ gilt:

$$L(\phi) \geq \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{k(y)}dy \qquad \text{mit } L(\phi) = \int_0^1 \|\phi'(t)\|dt.$$

(3 Punkte)

**Aufgabe 48)** Auf der oberen Halbebene $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ betrachten wir die Poincaré-Metrik

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

(a) Zeige, dass die folgenden Transformationen die Metrik in sich überführen ($b \in \mathbb{R}$):

$$\tau_b : (x,y) \mapsto (x+b, y), \qquad \sigma : (x,y) \mapsto \left( \frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right).$$

(b) Finde einen Weg $\phi$ minimaler Länge zwischen den Punkten $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ und $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sowie einen zwischen $P_0' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $P_1$ und berechne diese minimale Länge.

(6=3+3 Punkte)

**Aufgabe 49)** Berechne den Pullback $k^*(g_E)$ der euklidischen Metrik $g_E$ im $\mathbb{R}^3$ unter der Kugelkoordinatenabbildung $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aus Aufgabe 4) (b)

$$k(\phi, \psi) = (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi), \cos(\phi) \cdot \sin(\psi), \sin(\phi)).$$

Welche Aussage über den kürzesten Weg zwischen 2 Punkten auf der Sphäre $S^2$ kann man mit Hilfe der Aufgabe 47) aus dieser Formel gewinnen?

(4 Punkte)