Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 11 Abgabe bis Donnerstag 18.01.2007 um 11:00 Uhr

Aufgabe 40) Beweise das Lemma in Kapitel 27.2.1 des Skripts im Fall $i = 2$.

(3 Punkte)

Aufgabe 41) Sei V ein N-dimensionaler Vektorraum mit nicht ausgearteter Bilinearform b. Zeige für $x, y, z \in V$:

$$*_b(x \wedge y) \wedge z = (-1)^N \cdot (b(y,z) \cdot *_b(x) - b(x,z) \cdot *_b(y)) .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 42) (polarisierte ebene Lichtwellen) Sei $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^4$ mit $p \neq 0$. Auf dem $\mathbb{R}^4$, den wir mit dem von den dx_i erzeugten Vektorraum identifizieren, betrachten wir ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt b und die zugehörigen Abbildungen $* = *_b : \Lambda^i(\mathbb{R}^4) \to \Lambda^{4-i}(\mathbb{R}^4)$. Sei $w \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ nicht konstant.

(a) Zeige: eine 2-Form der Gestalt

$$\omega(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0 p_0 + x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3) \cdot w \in A^2(\mathbb{R}^4)$$

erfüllt genau dann die Maxwellschen Gleichungen $d\omega = 0$ und $d(*\omega) = 0$, wenn $w \wedge p = 0$ und $*w \wedge p = 0$ gilt.

(b) Zeige: Es gilt genau dann $w \wedge p = 0$, wenn es $q \in \mathbb{R}^4$ mit $w = q \wedge p$ gibt.

(c) Zeige: Im Fall $w \neq 0$ gilt genau dann $w \wedge p = 0$ und $*w \wedge p = 0$, wenn $b(p,p) = 0$ ist und es außerdem $q \in \mathbb{R}^4$ mit $b(p,q) = 0$ und $w = q \wedge p$ gibt.

(4=1+1+2 Punkte)

Aufgabe 43) (Lorentztransformationen) Zeige: Eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

lässt genau dann die quadratische Form $q = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ invariant, wenn es $r \in \mathbb{R}^*$ und $\epsilon \in \{1, -1\}$ gibt mit

$$a = \frac{1}{2} \cdot (r + r^{-1}), \qquad c = \frac{1}{2} \cdot (r - r^{-1})$$

$$b = \epsilon \cdot c, \qquad d = \epsilon \cdot a.$$

Es gilt dann $\det(A) = \epsilon$. Im Fall $\epsilon = 1$ schreiben wir $A = A(r)$.

(3 Punkte)

Aufgabe 44) Sei $L = \{(x_0, 0, 0, x_3) \in \mathbb{R}^4\}$ und $M = \mathbb{R}^4 \backslash L$. Wir betrachten den $*$ Operator zu der in Aufgabe 43) genannten quadratischen Form q.

(a) Zeige: die Form

$$\omega = \frac{x_1 dx_1 \wedge dx_3 + x_2 dx_2 \wedge dx_3}{x_1^1 + x_2^2} \in A^2(M)$$

erfüllt die Maxwellschen Gleichungen $d\omega = 0$ und $d(*\omega) = 0$.

(*Physikalische Interpretation: das von einem entlang der* x_3 *Achse fließenden Strom erzeugte Magnetfeld*)

(b) Berechne in den Notationen der Aufgabe 42) die Form $\omega_r = A(r)^*(\omega)$ und schreibe sie in der Gestalt $\omega_r = E_r \wedge dx_0 + B_r$ wie in Aufgabe 7)(a).

(*in einem in* x_3*-Richtung bewegten Bezugssystem erscheint die* x_3*-Achse wegen* $E_r \neq 0$ *geladen*)

(4=2+2 Punkte)