Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 10 Abgabe bis Donnerstag 11.01.2007 um 11:00 Uhr

Aufgabe 36) Sei M eine Mannigfaltigkeit und seien $\omega_1, \ldots, \omega_k \in A^n(M)$ geschlossene Formen. Es gebe für $j = 1, \ldots, k$ kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeiten M_j ohne Rand und differenzierbare Abbildungen $\phi_j : M_j \to M$, so dass die Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \int_{M_j} \phi_j^* \omega_i$$

invertierbar sei. Zeige, dass die Äquivalenzklassen von $\omega_1, \ldots, \omega_k$ in $H^n(M)$ linear unabhängig sind.

(3 Punkte)

Aufgabe 37) Sei M eine n-dimensionale kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit ohne Rand.

(a) Zeige: Ist n ungerade, so gilt für die Eulercharakteristik $\chi(M) = 0$.

(b) Zeige: Gilt $n = 4k + 2$ mit $k \in \mathbb{N}$, so sind $\dim(H^{2k+1}(M))$ und $\chi(M)$ gerade Zahlen.

Hinweis: Verwende die Poincaré-Dualität. Für Teil (b) kann man die Aufgabe 43) zur Linearen Algebra II von Prof. Kreck (SS 2006) benutzen.

(4=1+3 Punkte)

Aufgabe 38) In den Notationen der Aufgabe 28) setzen wir noch $M_5 = \mathbb{R}^3 \backslash (S^1 \cup G_2)$. Wir betrachten für $i = 3, 4, 5$ die bilineare Abbildung

$$b_i : H^1(M_i) \times H^1(M_i) \to H^2(M_i), \quad ([\alpha], [\beta]) \to [\alpha \wedge \beta].$$

(a) Zeige, dass b_4 und b_5 die Nullabbildungen sind.

(b) Zeige, dass b_3 eine nicht ausgeartete Bilinearform ist. Folgere, dass M_3 weder zu M_4 noch zu M_5 diffeomorph ist.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 39) Sei $n \geq 2$ ganz und

$$M = \left\{ A \in M(n, n, \mathbb{R}) |\ A = {}^tA,\ rang(A) = 1, Spur(A) = 1 \right\}$$

versehen mit der Unterraumtopologie von $M(n, n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Für $1 \leq i \leq n$ setzen wir $M_i = \{A = (a_{\mu\nu}) \in M | a_{ii} \neq 0\}$ und

$$\psi_i : M_i \to U_i = \mathbb{R}^{n-1}, \quad A = (a_{\mu\nu}) \mapsto \left(\frac{a_{1i}}{a_{ii}}, \ldots, \frac{a_{i-1,i}}{a_{ii}}, \frac{a_{i+1,i}}{a_{ii}}, \ldots, \frac{a_{ni}}{a_{ii}} \right).$$

(a) Zeige, dass M mit der Überdeckung durch die M_i und mit den Kartenabbildungen ψ_i die Struktur einer Mannigfaltigkeit bekommt.

(b) Zeige, dass M genau dann orientierbar ist, wenn n gerade ist.

(5=3+2 Punkte)

Wir wünschen allen Hörern der Vorlesung ein frohes Weihnachtsfest und ein erfolgreiches neues Jahr 2007!