Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis III WS 2006/07

Blatt 9   Abgabe bis Donnerstag 21.12.2006 um 11:00 Uhr

Aufgabe 32) Eine offene Teilmenge U einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heiße kohomologie-endlich, wenn alle $H^i(U)$ endlich dimensional sind. Für diese U definiert man die Eulercharakteristik durch

$$\chi(U) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot \dim_{\mathbb{R}}(H^i(U)).$$

Zeige: sind für offene kohomologie-endliche Mengen $U, V \subset M$ auch $U \cup V$ und $U \cap V$ kohomologie-endlich, so gilt:

$$\chi(U \cup V) + \chi(U \cap V) \quad = \quad \chi(U) + \chi(V).$$

(3 Punkte)

Aufgabe 33) (a) Formuliere und beweise eine zu Aufgabe 28)a) analoge Aussage für die Kohomologie mit kompaktem Träger.

(b) Berechne die Kohomologie mit kompaktem Träger $H^i_c(M)$ für $M = \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k$ $(0 \leq k \leq n-2)$ sowie für die in Aufgabe 28)b) konstruierten Mannigfaltigkeiten $M_1, M_2, M_3, M_4 \subset \mathbb{R}^3$.

(5=2+3 Punkte)

Aufgabe 34) Ist $U \subset M$ eine offene Teilmenge einer N-dimensionalen Mannigfaltigkeit M, so wird durch $Tr_U : H_c^N(U) \to \mathbb{R}$, $[\omega] \mapsto \int_U \omega$ eine Linearform definiert. Seien $U, V \subset M$ offen und $1 \leq \nu \leq N$.

Zeige, dass für $\rho \in H^{\nu-1}(U \cap V)$ und $\phi \in H_c^{N-\nu}(U \cup V)$ gilt:

$$Tr_{U\cap V}(\rho \wedge \delta_c(\phi)) \quad = \quad (-1)^\nu \cdot Tr_{U\cup V}(\delta(\rho) \wedge \phi)$$

mit den Verbindungshomomorphismen

$$\delta : H^{\nu-1}(U \cap V) \to H^\nu(U \cup V) \qquad \delta_c : H_c^{N-\nu}(U \cup V) \to H_c^{N-\nu+1}(U \cap V).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 35) (a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0, 1 \in I$ und $\phi : U \to V$ differenzierbar mit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeige, dass mit den Abbildungen η aus Aufgabe 27 das folgende Diagramm für alle $k \in \mathbb{N}$ kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} A^k(I \times V) & \xrightarrow{\eta} & A^{k-1}(V) \\ {\scriptstyle (id\times\phi)^*}\downarrow & & {\scriptstyle \phi^*}\downarrow \\ A^k(I \times U) & \xrightarrow{\eta} & A^{k-1}(U) \end{array}$$

(b) Sei M eine Mannigfaltigkeit ohne Rand. Für $t \in I$ sei

$$f_t : \quad M \to I \times M, \quad m \mapsto (t, m).$$

Zeige, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abbildungen f_0^* und f_1^* als Abbildungen von $H^k(I \times M)$ nach $H^k(M)$ übereinstimmen.

(c) Sei $g : I \times M \to N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Für $t \in I$ setzen wir: $g_t : M \to N, m \mapsto g(t, m)$. Zeige: $g_0^* = g_1^*$ als Abbildung von $H^k(N)$ nach $H^k(M)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(4=2+1+1 Punkte)